This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ENGINEERING LIBRARY

TRAITÉ

DE

LA STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

Paris. — Typographie Henneyer et fils, rue du Boulevard, 7.

TRAITÉ

DE LA

STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

PAR

M. LE Dr HERMANN SCHEFFLER

CONSEILLER DES TRAVAUX PUBLICS DU DUCHÉ DE BRUNSWICK

OUVRAGE TRADUIT DE L'ALLEMAND ET ANNOTÉ

PAR

M. VICTOR FOURNIÉ

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

PREMIÈRE PARTIE

Théorie des voûtes et des murs de soutènement

—

TEXTE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

Quai des Augustins, 49

M DCCC LXIV

Droits de traduction et de reproduction réservés

AVIS DU TRADUCTEUR.

L'ouvrage dont nous offrons la traduction au public français a paru à Brunswick en 1857. L'auteur a publié depuis cette époque des opuscules sur la résistance des constructions métalliques, qui, réunis au volume de 1857, constituent un Traité complet de la stabilité des constructions. Le présent volume est la première partie de ce Traité et comprend les applications de la mécanique aux constructions en terre et en maçonnerie, savoir : la théorie des voûtes, la poussée des terres, la théorie des murs de soutènement.

L'auteur s'est proposé de rédiger un ouvrage d'enseignement pour les écoles techniques et en même temps un manuel pouvant fournir au constructeur les méthodes simplifiées et les tables numériques dont il a besoin. De là les détails minutieux dans lesquels entre l'auteur pour élucider tous les cas et aplanir entièrement la voie ; de là aussi le grand nombre d'exemples instructifs successivement développés. Comme

livre d'enseignement, cet ouvrage offre une qualité bien précieuse : c'est cet esprit scientifique, qui ne permet pas qu'on s'appuie sur une hypothèse sans le déclarer formellement, et sans discuter la valeur de cette hypothèse, sa liaison avec les principes antérieurs et les conséquences qui en découlent. Cela est d'un inestimable secours pour l'étudiant, et cela évite au praticien bien des calculs inutiles ou vicieux qui lui feraient prendre en haine une théorie qu'il croirait en contradiction avec les faits. En lisant les chapitres de ce livre, qui contiennent la critique des ouvrages antérieurs, on sera frappé des inconséquences qui ont eu ou ont encore cours, du grand nombre de démonstrations prétendues qui reposent sur des hypothèses gratuites. M. Scheffler en fait bonne justice.

Cet ouvrage mériterait de devenir classique, quand même il n'offrirait que ces avantages et serait d'ailleurs une pure compilation. Mais il n'en est rien, et, pour parler seulement ici de la théorie des voûtes, qui occupe la plus grande place, on trouvera la théorie géométrique des courbes de pression exposée avec des développemeuts aussi originaux qu'élégants, les voûtes non symétriques et les voûtes composées abordées avec sagacité, et surtout deux innovations capitales.

Le principe de la moindre résistance d'une part, et de l'autre le rejet de l'hypothèse de Navier et de Bélanger sur la répartition des pressions.

Coulomb a assis la théorie des voûtes sur des bases solides, mais en se restreignant au cas de l'équilibre limite et des voussoirs incompressibles. M. Méry a voulu faire un pas de

plus et donner les moyens de vérifier la stabilité d'une voûte, en tenant compte de la compressibilité des voussoirs ; mais il s'est heurté à la loi inconnue de la répartition des pressions sur les divers points des surfaces de joints, et il a tourné l'obstacle en admettant une loi hypothétique déjà formulée par Navier et améliorée par M. Bélanger, et qu'on peut nommer *la loi du trapèze* : les pressions élémentaires sur les points d'un joint seraient proportionnelles aux ordonnées d'un trapèze (ou d'un triangle), dont le centre de gravité répond au point d'application de la pression résultante.

Il n'est pas difficile de reconnaître que cette hypothèse correspond à l'hypothèse de la flexion plane qui sert de base au calcul des constructions métalliques.

M. Scheffler n'a pas hésité sur ce point à faire reculer la théorie ; il a ouvertement déclaré que la loi du trapèze n'est fondée sur aucune observation, que certains faits, au contraire, tendent à l'infirmer ; dès lors, pour lui, il n'y a, dans l'état actuel de la science, qu'un parti à prendre : traiter les voûtes qu'on considère comme si elles étaient formées de voussoirs incompressibles, et ensuite tenir compte d'une manière tout *empirique* des effets de la compressibilité, en suivant l'exemple des constructions stables antérieurement exécutées.

Mais en se restreignant à l'hypothèse des voussoirs incompressibles, l'auteur a voulu donner une théorie complète de ce cas. Coulomb, Méry, n'indiquent que des courbes des pressions possibles, et non la courbe des pressions réelle, que les théorèmes de la statique générale laissent indéterminé-

née. M. Scheffler a recours au principe de la moindre résistance, énoncé par Moseley et mis dans tout son jour par M. Scheffler lui-même. Ce principe lève l'indétermination dans le problème des voûtes et dans beaucoup d'autres analogues, ainsi que l'auteur le montre par des exemples nombreux dans tout le cours de l'ouvrage.

Grâce à ce progrès, la théorie des voûtes est édifiée dès aujourd'hui pour le cas des voussoirs incompressibles. Les praticiens peuvent prendre cette théorie comme guide avec sécurité; les étudiants possèdent un exposé méthodique et clair, qui ne laisse pas de place aux interprétations diverses. (Nous avons entendu interpréter de façons très-différentes et toutes plausibles le mémoire de M. Méry.)

Les efforts des chercheurs peuvent être reportés en avant sur le point capital que nous avons signalé plus haut : la découverte de la loi de répartition des pressions à la surface d'un corps solide homogène.

Ici ce n'est plus la théorie des voûtes seule qui est intéressée, toute la science des constructions réclame pour base cette loi inconnue, qui est le grand désidératum de la physique moléculaire. L'analyse mathématique s'y est appliquée en vain : c'est l'expérience qui doit prononcer maintenant[1].

[1] Voici comment M. Poncelet, dans son *Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes*, indique les progrès à accomplir :

« On sait que l'Académie des sciences a jusqu'ici vainement proposé l'un de ses grands prix pour la solution analytique de cette difficile et importante question (la loi de répartition des forces moléculaires à la surface extérieure

Admettons qu'un poids isolé repose au centre de gravité de la face supérieure d'un socle en pierre; ce sera, si l'on veut, une mince colonne de fonte. Dans ce cas, la loi du trapèze donne un résultat fort simple : la pression de la colonne se répartit uniformément sur toute la face du socle. Ainsi les molécules qui reçoivent directement la pression la transmettraient, à la manière des fluides, uniformément dans tous les sens. Mais, quelque peu précises que soient nos notions sur

d'un corps solide), qu'il conviendrait peut-être de limiter, quant à présent, au cas d'un prisme élastique uniquement soumis à l'action de la pesanteur et reposant sur un plan matériel horizontal, supposé non déformable, par une base dont les distances intermoléculaires seraient elles-mêmes censées invariables. Aussi doit-on appeler de tous ses vœux le perfectionnement et le développement des méthodes par lesquelles MM. Navier, Poisson, Cauchy, Lamé et Clapeyron ont abordé au point de vue mathématique les questions qui concernent l'équilibre intérieur des solides élastiques, et qui, en attendant une solution vraiment rigoureuse, ont déjà conduit M. de Saint-Venant à perfectionner l'ancienne théorie de la résistance des corps à la flexion, au glissement parallèle et à la tension transversale produits par des forces extérieures et diversement appliquées. Le long intervalle qui s'était écoulé depuis les premières recherches des géomètres d'abord cités avait fait craindre aux amis éclairés de la science que cette branche importante de la physique mathématique ne tombât dans un complet abandon, lorsque le remarquable ouvrage de M. Lamé (*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1852), est venu dissiper cette appréhension, en nous donnant l'espoir de voir bientôt la théorie des voûtes, elle-même, soumise à des principes plus satisfaisants encore que ceux que nous possédons. Du moins doit-on savoir un gré infini à ce savant d'avoir répandu sur une aussi difficile matière une clarté d'exposition qui la rend pour ainsi dire élémentaire, et d'y avoir semé des aperçus neufs et féconds qui ne tarderont pas sans doute à recevoir d'utiles applications aux problèmes variés qui intéressent l'art de l'ingénieur. Ajoutons que les belles et délicates expériences de M. Wertheim sur la compression des solides élastiques sont un autre motif d'espérer une prompte et heureuse solution. »

la constitution physique des corps solides, elles répugnent à de semblables conséquences; il faudrait pour cela, en effet, que le solide n'eût pas de cohésion du tout.

Cette loi du trapèze est donc évidemment une limite, mais les solides naturels s'en écartent toujours. Ainsi, dans le cas actuel, supposons que la face du socle considérée soit indéfinie dans tous les sens : il paraît bien vraisemblable que la répartition de la pression de la colonne se fera suivant les ordonnées d'une surface de révolution à axe vertical passant par le centre d'appui de la colonne et asymptote au plan d'appui.

Si le socle est limité, la courbe se modifiera, mais en conservant un caractère analogue. Si, au lieu d'un poids isolé, on a une série de poids distribués suivant une loi quelconque, la courbe changera, mais la ligne droite annoncée par la loi du trapèze ne se produira que dans des cas tout à fait exceptionnels.

Il ne nous appartient pas d'indiquer un mode d'expérimentation : nous ne pouvons cependant nous dispenser de rappeler à l'attention des ingénieurs le dynamomètre chromatique du regretté Wertheim, dont la chronique des *Annales des ponts et chaussées* (1854, 1er semestre, p. 115) signalait l'importance au point de vue de la résistance des matériaux.

En attendant les progrès de la science, qui ne sont peut-être pas encore prochains, voici, nous le répétons, un ouvrage offrant l'état actuel d'un des plus importants chapitres de la science de l'ingénieur; méthodique et détaillé, et qui, rédigé

par un constructeur, ne perd jamais de vue les applications pour s'égarer dans des digressions analytiques sans portée.

Nous croyons donc faire une chose utile en mettant nos camarades, les élèves de nos écoles techniques et les constructeurs en général à même de lire le livre de M. le docteur Scheffler, et nous nous estimerons heureux si cette étude contribue à dissiper le préjugé qui règne encore parmi les ingénieurs français contre les produits intellectuels d'outre-Rhin.

V. FOURNIÉ,
Ingénieur des ponts et chaussées.

Vitry-le-Français, mai 1864.

TRAITÉ

DE

LA STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES VOUTES ET DES MURS DE SOUTÈNEMENT.

LIVRE I.

PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

§ 1. Exposition du principe.

Moseley a fait connaître, sous le nom de : *Principe de la moindre résistance*, une nouvelle loi de statique, publiée pour la première fois dans le *Philosophical Magazine* du mois d'octobre 1833. Cette loi, susceptible d'applications pratiques très-importantes à l'art des constructions, particulièrement en ce qui concerne la théorie des voûtes et des murs de soutènement qui va nous occuper, ne paraît pas néanmoins avoir pris dans la science de l'ingénieur le rang qu'elle mérite : c'est ce qu'on fera ressortir amplement dans la critique des théories antérieures qu'on trouvera au deuxième livre. Cette loi a d'ailleurs été l'objet d'une explication défectueuse de la part de Moseley, et manque jusqu'ici d'une démonstration rigoureuse : je vais donc la définir et la démontrer à ma manière dans les pages qui suivent ; puis je ferai connaître l'exposition de Moseley, et enfin je ferai l'application du principe à quelques exemples.

Qu'on se représente un système de corps qui ne sont liés les uns aux autres que par des surfaces de contact ; la position et la forme de ces surfaces sont d'ailleurs telles que tous les corps du système

forment un ensemble de figure invariable, tant que les forces qui les sollicitent demeurent comprises entre des limites déterminées. Enfin il existe dans le système plusieurs points fixes.

Cela posé, on cherche la résultante de toutes les forces extérieures appliquées aux différents points du système, y compris les poids de ses parties [1] : on décompose par le théorème des moments la résultante en forces parallèles passant par les points fixes. Si ces points peuvent résister dans la direction de la résultante, leurs réactions seront évidemment égales et contraires aux composantes correspondantes [2]. Mais, par une disposition physique des surfaces d'appui, ces points fixes peuvent être seulement en état de résister dans d'autres directions déterminées, ou bien il peut se produire dans le système des forces intérieures dans des directions différentes et qui se reportent sur les points d'appui. Dans ces cas il se développera aux points d'appui, outre les composantes parallèles à la résultante, d'autres réactions qui, considérées pour l'ensemble du système, se font équilibre, mais qui, sur chaque point d'appui, se composent respectivement avec les réactions parallèles à la résultante, et produisent ainsi une réaction effective tellement dirigée que le point d'appui soit capable de la faire naître.

On trouvera généralement que ces forces qui dévient les réactions de la direction de la résultante générale peuvent être remplacées par une infinité d'autres groupes de forces, de grandeurs et de directions différentes, mais qui jouissent également de cette propriété de tenir le système en équilibre.

En outre, quand les points d'appui ne sont plus des points géométriques, c'est-à-dire quand des surfaces du système sont en contact sur une certaine étendue avec des surfaces d'appui fixes qui leur opposent une résistance, on peut faire varier à volonté les

[1] Il résulte de cet énoncé même que ce principe n'est applicable qu'au cas où les forces extérieures ont une résistance unique.

[2] Ces composantes elles-mêmes ne sont pas déterminées par le théorème des moments, toutes les fois qu'il y a plus de trois points d'appui, attendu que ce théorème ne fournit que deux équations :

$$\Sigma px = PX$$
$$\Sigma py = PY$$

ce qui en donne trois en y joignant $\Sigma p = P$.

On sait en effet que la répartition d'une charge sur quatre points d'appui ne peut être donnée par les lois de la statique générale, qui est obligée de considérer le problème comme indéterminé.

points d'application des résistances sur ces dernières surfaces, et cela introduit une nouvelle indétermination dans le choix du groupe de réactions propre à assurer l'équilibre du système.

Le but du principe de la moindre résistance est précisément de lever cette indétermination autant qu'il est possible, en resserrant les limites dans lesquelles on peut faire varier les deuxièmes composantes ci-dessus définies du groupe des réactions.

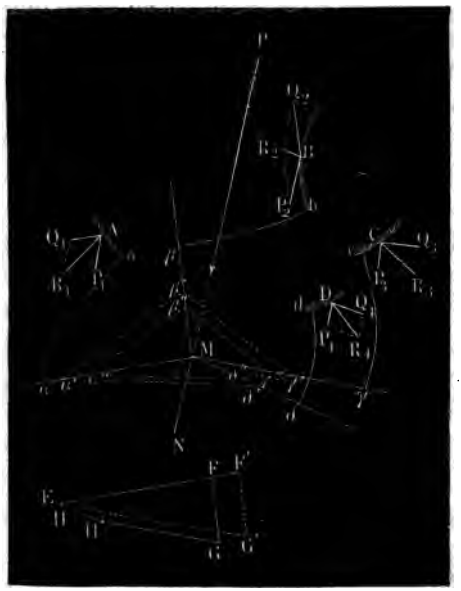
Quand les points d'application et les directions des réactions sont également variables, le principe nouveau ne fournit pas un caractère absolument distinctif, ne s'appliquant qu'à un groupe unique parmi l'infinité des groupes de réactions possibles. Mais il suppose qu'on a préalablement divisé l'infinie multiplicité des groupes possibles en certaines classes, et il tire de chaque classe, par un signe caractéristique, le groupe qui, en réalité, peut seul avoir lieu. Il reste alors à faire sortir d'autres considérations le choix de la classe dans laquelle doit se trouver le groupe unique cherché; mais on ne peut tirer de la nature du système entier aucun autre moyen de distinction [illegible] le problème demeure indéterminé [1], et le principe mentio[illegible]ulement à trier l'infinie multiplicité des groupes de réactio[illegible]ibles, et à réduire les groupes réellement admissibles à un choix plus restreint.

Soient : aA, bB, cC, dD (fig. 1) les surfaces par lesquelles le système donné est en contact avec des surfaces d'appui fixes; soient A, B, C, D, des points choisis à volonté sur ces surfaces, et qui pourraient être les points d'application des réactions R_1, R_2, R_3, R_4; soient P la grandeur, PM la direction de la résultante de toutes les forces appliquées au système, tenue en équilibre par le groupe des réactions

[1] Ce mot d'indétermination peut choquer à bon droit le lecteur qui aborde pour la première fois la théorie des voûtes. Il n'est pas sans intérêt de s'expliquer tout de suite à ce sujet. Le problème dont il s'agit est parfaitement déterminé en lui-même ; il n'y a dans la nature, et dans chaque cas, qu'un seul groupe de réactions possible. L'indétermination existe seulement pour nous, faute d'avoir un nombre d'équations suffisant pour déterminer les inconnues du problème. La considération de l'équilibre du système, indépendamment de sa nature, a donné les six équations de l'équilibre. Elles ne suffisent pas en général ; il faudrait y joindre les équations qui régissent la répartition des pressions dans les corps solides : cette loi de répartition est inconnue; de là l'indétermination, qui tient à un défaut d'étendue des connaissances actuelles. Le problème serait parfaitement déterminé pour nous si le système était fluide au lieu d'être solide, parce que la loi de répartition des pressions dans les fluides est connue.

dont on vient de parler. Je décompose la réaction R_1 en une composante P_1 parallèle à P, et une Q_1 perpendiculaire à P, et ainsi des autres; je trace ensuite dans un plan perpendiculaire à PM les lignes $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$, respectivement parallèles aux composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; puis je considère comme appartenant à une seule et même classe tous les groupes de réactions dont les composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont parallèles aux mêmes axes $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$.

Fig. 1.



Cela posé, le principe de la moindre résistance s'énonce ainsi : *Parmi tous les groupes d'une même classe, celui-là seul est possible pour lequel, en vertu des propriétés physiques du système, les composantes* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *perpendiculaires à la direction* PM, *sont simultanément un minimum.*

Ce principe laisse indéterminée, comme nous l'avons annoncé, la classe à laquelle appartient le groupe de réactions effectif, en d'autres termes, les directions des composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 de ces réactions dans un plan perpendiculaire à PM : la détermination de ces directions est laissée à un autre ordre de considérations, qui ressortent suffisamment des données dans la plupart des cas de la pratique.

Le principe donne aussi lieu à la question de savoir si, dans une classe donnée de réactions, il existe un groupe unique offrant un minimum simultané de toutes les composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ou bien s'il y en a plusieurs jouissant de cette propriété. On ne peut supposer que, plusieurs groupes satisfaisant au minimum, l'un d'eux ait toutes ses composantes plus grandes que celles d'un autre; car alors le premier ne pourrait être considéré comme un minimum. Mais il peut se faire que quelques-unes des composantes de

l'un soient moindres, et en même temps quelques-unes aussi plus grandes que les correspondantes de l'autre. Il reste alors à choisir entre tous les groupes de cette classe pour lesquels il y a un minimum simultané des composantes, et le problème demeure par ce nouveau motif indéterminé quand même il n'y aurait plus de doute sur la classe à choisir.

Il est clair, du reste, qu'aucune indétermination n'a lieu quand le système donné ne s'appuie que sur un, deux ou trois points fixes; mais elle apparaît quand il renferme quatre points fixes ou un plus grand nombre. En effet, des lois générales de l'équilibre il résulte[1] que la somme des composantes P_1, P_2, P_3, P_4 parallèles à PM des réactions R_1, R_2, R_3, R_4 doit être égale à la résultante P; et que les composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, perpendiculaires à la direction de P, doivent être telles que, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles se feraient équilibre. Ces dernières composantes doivent donc être proportionnelles aux côtés EF, FG, GH, HE d'un polygone fermé quelconque EFGH, dont les côtés seraient respectivement parallèles aux directions des composantes $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$. Or, du moment où il y a plus de trois composantes, et où, par conséquent, le polygone a au moins quatre côtés, on sait que, connaissant la direction des côtés et l'un d'eux, tous les autres ne s'ensuivent pas immédiatement, mais qu'il y a plusieurs côtés arbitraires.

Dans ce cas, plus d'une composante demeurant indéterminée, il ne saurait y avoir un minimum général unique. Il y aura, au contraire, un certain nombre de groupes de composantes répondant à un minimum simultané. On construira ces groupes par la méthode suivante : on tracera parallèlement à αM, βM, γM, δM, un polygone EFGH, qu'on fera varier semblablement à lui-même. Tous les côtés, variant alors proportionnellement, atteindront un minimum simultané. On fera dans le plan $\alpha\beta\gamma\delta$ les lignes $\alpha' M$, $\beta' M$, $\gamma' M$, $\delta' M$ respectivement égales aux côtés EF, FG, GH, HE. Le polygone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ variera semblablement à lui-même, en même temps que EFGH, et l'on construira facilement la position $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$ qui inter-

[1] Les lois générales de l'équilibre donnent, outre les relations rappelées et mises en œuvre ci-dessous, trois autres équations exprimant que le couple résultant a un moment nul. Ces équations, que le principe de la moindre résistance laisse de côté, serviront à la discussion ultérieure dans chaque cas d'application, pour compléter la solution.

cepte sur les lignes αM, βM, γM, δM les moindres valeurs qui puissent être attribuées aux composantes d'après les conditions spéciales du système donné.

§ 2. Démonstration du principe de la moindre résistance.

Nous allons maintenant démontrer le principe de la moindre résistance, à savoir : que parmi tous les groupes possibles de réactions R_1, R_2, R_3, R_4, dont les composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 perpendiculaires à PM sont parallèles à des axes donnés αM, βM, γM, δM, celui-là seul peut se réaliser, pour lequel ces composantes deviennent simultanément minimum.

Qu'on imagine des tiges inflexibles dans les directions $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$, reliées invariablement au point M. Je supprime les corps résistants qui soutiennent en A, B, C, D le système donné, et ne conserve que leurs surfaces Aa, Bb, Cc, Dd, dans les parties où elles touchent les surfaces extérieures du système. Je suppose ces dernières surfaces liées invariablement aux tiges respectives $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$ par d'autres tiges droites ou courbes mais inflexibles $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Enfin, au lieu de la résultante PM, j'admets que le système est soutenu par une tige inflexible partant de M, et appuyée en N à un point de sa direction supposé fixe.

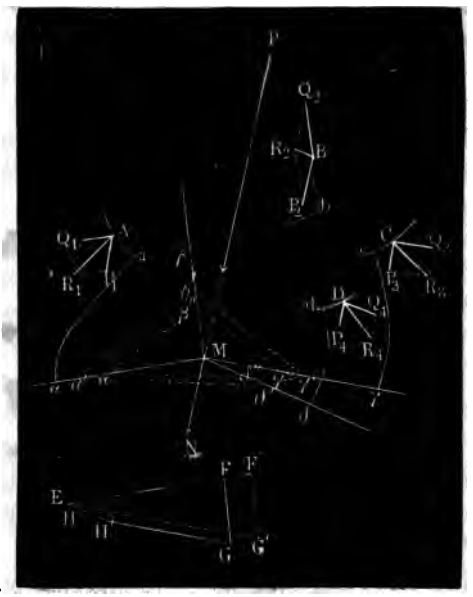
Le système donné est en équilibre grâce à la résistance des tiges MN, $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$, sur lesquelles toutes les composantes des réactions de A, B, C, D se reportent par le moyen des liaisons invariables A$a\alpha$, B$b\beta$, C$c\gamma$, D$d\delta$. L'équilibre a lieu ainsi comme il aurait lieu par la résistance des points d'appui en A, B, C, D, et il est clair que les tensions exercées sur les tiges $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$ seront respectivement égales aux composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, tandis que la tension de la tige MN conserve la valeur constante $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Les réactions R_1, R_2, R_3, R_4 et leurs composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 dépendent absolument de la nature du système et de la disposition physique des surfaces de contact Aa, Bb, Cc, Dd; mais elles ne dépendent pas de la faculté de résistance plus ou moins grande des corps faisant appui. Ainsi, quelle que soit la solidité relative des tiges $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$, chacune aura une tension déterminée : $Q_1 = M\alpha'$, $Q_2 = M\beta'$, $Q_3 = M\gamma'$, $Q_4 = M\delta'$. Si l'on suppose ces tiges

plus résistantes, il n'en résultera ni augmentation ni diminution des tensions des composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 qui leur correspondent.

Que si l'on suppose, au contraire, aux tiges une moindre faculté de résistance, représentée respectivement par $M\alpha''$, $M\beta''$, $M\gamma''$, $M\delta''$, il n'en résultera non plus aucun changement des tensions ou composantes dont il s'agit; mais un certain nombre de tiges se briseront, et par conséquent l'équilibre du système ne pourra subsister. Si cependant ces résistances moindres, $M\alpha''$, $M\beta''$, $M\gamma''$, $M\delta''$, étaient telles qu'elles formassent un groupe de composantes capables de tenir le système en équilibre, il serait absurde alors d'admettre la rupture : des tiges qui, avant de se rompre, maintiennent le système en équilibre, ne se rompront évidemment pas [1].

Fig. 2.



On ne peut donc concevoir aucun groupe de composantes qui soit plus petit que celui qui existe réellement et soit néanmoins capable de tenir le système de corps en équilibre [2]; en d'autres ter-

[1] Là est le nœud de la démonstration.

Elle suppose 1° que le mouvement moléculaire qui donne naissance aux réactions des appuis a lieu sans vitesse sensible; 2° que les actions moléculaires se développent successivement; en sorte que le système ne puisse arriver à la position à grandes tensions $M\alpha'$,... sans avoir passé par la position à tensions moindres $M\alpha''$,... Les constructeurs admettront volontiers ces propositions comme plausibles. Le principe s'ensuit immédiatement.

[2] Un semblable équilibre est mathématiquement possible, mais il serait instable, et à cause de cela il ne se produira ou ne se maintiendra pas en fait : il n'y a pas lieu de se préoccuper de cette éventualité. Les perturbations et vibrations auxquelles sont exposés les solides naturels ne permettent pas le maintien d'un équilibre instable.

mes, les tensions des tiges dont il s'agit, ou les composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 des réactions R_1, R_2, R_3, R_4, seront des minimums; et par là nous n'entendons pas le minimum isolé d'une composante particulière, mais un minimum général de toutes les composantes. Car le raisonnement qui précède ne mènerait pas à une absurdité et ne prouverait pas la réalité exclusive du groupe $M\alpha'$, $M\beta'$, $M\gamma'$, $M\delta'$, s'il y avait un autre groupe, comme $M\alpha''$, $M\beta$, $M\gamma''$, $M\delta$, dans lequel quelques composantes, $M\alpha''$, $M\gamma''$, seraient moindres, mais d'autres, $M\beta$, $M\delta$, plus grandes que dans le premier groupe. Supposons en effet que les facultés de résistance des tiges soient telles que $M\alpha''$, $M\beta$, $M\gamma''$, $M\delta$ représentent leurs limites respectives : comme les intensités des réactions ne dépendent pas de ces facultés de résistance, il adviendra que les tiges $M\alpha$, $M\gamma$ se briseront, en éprouvant, au moment de la rupture, les tensions $M\alpha''$, $M\gamma''$, limites de leur résistance; les deux autres tiges, étant assez solides, ne se briseront point, et l'on ne peut dire si, au moment de la rupture des premières, elles éprouveront leurs tensions maximum.

On ne peut donc pas affirmer que le groupe $M\alpha''$, $M\beta$, $M\gamma''$, $M\delta$, qui, s'il existait, maintiendrait le système en équilibre, entrera réellement en action au moment de la rupture des premières tiges $M\alpha$, $M\gamma$; mais il n'y a pas absurdité à admettre cette rupture, et l'on n'est pas autorisé à dire que ce groupe de réactions ne se produira pas, et que le groupe $M\alpha'$, $M\beta'$, $M\gamma'$, $M\delta'$ est seul possible.

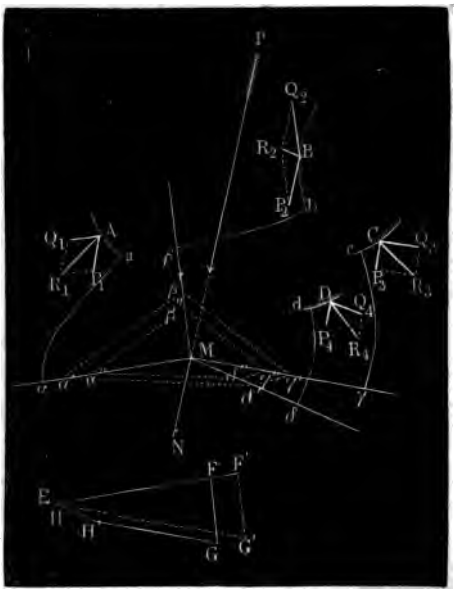
Des considérations précédentes résulte seulement la *possibilité* de l'existence physique du groupe $M\alpha'$, $M\beta'$, $M\gamma'$, $M\delta'$, en tant qu'il présente un minimum général des forces. Si $M\alpha''$, $M\beta$, $M\gamma''$, $M\delta$ est un autre groupe minimum, dans lequel nécessairement les unes seront moindres, les autres plus grandes que celles du premier (sans quoi l'un ou l'autre des deux groupes ne serait pas minimum), on pourra affirmer avec le même fondement la possibilité du second groupe que celle du premier, et en général on reconnaît seulement que le groupe effectif est l'un des minimums dont il s'agit [1].

Le nombre des minimums ci-dessus définis se réduit à un, quand

[1] Arrêtons-nous encore une fois pour préciser le sens des mots. Ces minimums des forces considérées ne sont pas du tout des minimums absolus, comme on l'entend en géométrie, caractérisés par un coefficient différentiel qui s'annule. Il s'agit ici des moindres valeurs que puissent prendre ces forces, eu égard aux conditions physiques du système. L'auteur fait d'ailleurs plus loin cette remarque (§ 11).

le système donné s'appuie contre trois surfaces fixes ou contre un nombre moindre. Car, pour trois points d'appui A, B, C, les polygones EFG, $\alpha'\beta'\gamma'$ deviennent des triangles, qui sont toujours semblables à eux-mêmes, quand on donne les directions des côtés. Pour deux points d'appui A, B, $M\alpha$ et $M\beta$ tombent nécessairement sur les deux directions opposées d'une seule et même ligne droite, et les composantes Q_1, Q_2, représentées par $M\alpha'$, $M\beta'$, sont égales et opposées. Pour un seul point d'appui A, il ne peut se produire aucune composante telle que Q_1, car il faut qu'il y ait destruction en ce point : dans ce cas, l'équilibre n'est possible que si la surface d'appui en A est capable de s'opposer directement à la résultante P du système entier.

Fig. 3.



Le principe de la moindre résistance ne laisse non plus aucune indécision quand les masses dont se composent le système donné et ses appuis ne sont plus absolument rigides, mais sont compressibles et élastiques. On ne doit pas alors se représenter les surfaces A*a*, B*b*, C*c*, D*d* des appuis comme liées invariablement aux tiges incompressibles $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$ par le moyen des tiges inflexibles $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$; parce qu'en laissant ainsi complétement de côté les appuis élastiques pour les remplacer par la fixation de certains points de ces surfaces en des lieux fixes de l'espace, on fait subir à la nature véritable de la faculté de résistance résidant dans ces appuis une altération inadmissible [1].

[1] Inadmissible, parce que l'hypothèse d'une transmission de force d'un corps à l'autre sans déformation corrélative de l'un et de l'autre est une hypothèse absurde. On peut souvent conserver cette fiction comme manière de dire, mais à la condition expresse qu'elle ne passe pas dans les raisonnements et les calculs.

On pourra cependant reproduire les raisonnements qui précèdent dans ce cas, en admettant que les surfaces liées aux tiges M$a\alpha$, M$b\beta$, M$c\gamma$, M$d\delta$ sont des surfaces absolument rigides qui ont dévié à l'intérieur ou à l'extérieur des appuis pour prendre une position telle, que les compressions et extensions possibles des autres parties n'obligent plus ces masses à de nouveaux reculs moléculaires. Ces surfaces seront ainsi supposées à une distance, peut-être infinie dans certains cas, des surfaces d'appui.

Mais, quand il s'agit de systèmes ainsi composés (seul cas qui se présente dans la nature), il faudra, dans la recherche des groupes de réactions possibles, tenir compte des effets de l'élasticité et de la compressibilité des corps, ce qui restreint de différentes manières l'indétermination. On ne pourra pas admettre, par exemple, que la direction d'une réaction R_1 quelconque, c'est-à-dire la direction de la résultante de toutes les réactions élémentaires distribuées sur la surface Aa, passe par une arête ou un sommet mathématique d'un corps quelconque ; il faudrait pour cela que sur un espace infiniment petit s'exerçât une pression finie, ce qui est impossible sur les corps naturels. Le point d'application A d'une telle réaction devra être, au contraire, toujours à une certaine distance de tout sommet et de toute arête, à cause de la compression qui s'exerce dans son voisinage.

§ 3. Construction du vrai système des résistances.

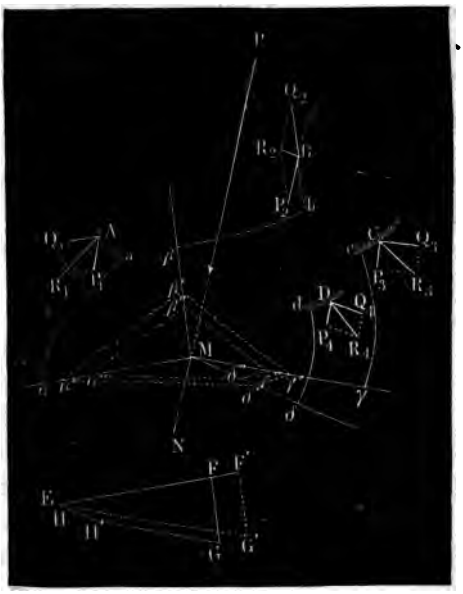
Il nous reste un mot à dire sur la construction des systèmes de réactions R_1, R_2, R_3, R_4, qui correspondent au minimum des composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, et qui devront ainsi être considérés, en vertu du principe de la moindre résistance, comme des systèmes possibles.

Je suppose connus les points A, B, C, D des surfaces d'appui où doivent s'appliquer les réactions R_1, R_2, R_3, R_4. Si l'on ne pouvait les connaître d'avance, on aurait à répéter les considérations précédentes pour toutes les positions possibles des points d'application, ou à les faire varier par une méthode générale, pour obtenir le minimum cherché des composantes.

Maintenant je décompose par le principe des moments la résultante générale P du système en forces parallèles p_1, p_2, p_3, p_4, ap-

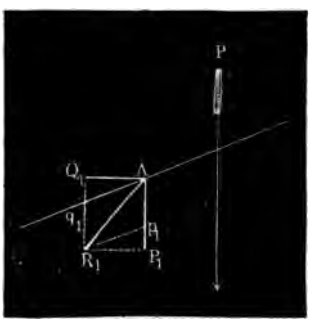
pliquées aux points A, B, C, D[1] (il faut bien distinguer ces forces des forces P_1, P_2, P_3, P_4, qui sont des composantes de R_1, R_2, R_3, R_4). Si tous les points d'appui étaient capables de fournir une réaction parallèle à la force P, ou s'il ne se produisait aucune action latérale dans l'intérieur du système, p_1, p_2, p_3, p_4 seraient les réactions effectives. Comme, par l'état de la question, il n'en est pas ainsi, il se joint aux forces p_1, p_2, p_3, p_4, dans des directions inclinées sur la direction de P, d'autres composantes que nous désignerons par q_1, q_2, q_3, q_4 (distinctes de Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, qui sont les composantes normales des réactions R_1, R_2, R_3, R_4). Ces dernières forces se construisent en faisant des parallélogrammes dont les diagonales soient R_1.... et ayant respectivement p_1... pour premiers côtés.

Fig. 4.



De ces constructions il résulte que, pour chaque point d'application A, les forces considérées jusqu'ici, R_1, P_1, Q_1, p_1, q_1, sont toutes dans un même plan, et que les points qui terminent les lignes représentatives de Q_1, q_1, R_1 sont en ligne droite (fig. 5).

Fig. 5.



Il est clair, en outre, que, les forces p_1, p_2, p_3, p_4 formant un système en équilibre avec la résultante P, le système des forces q_1, q_2, q_3, q_4 doit se tenir de lui-même en équilibre. D'où il suit que, s'il

[1] On a déjà remarqué plus haut que ces forces p_1, p_2, p_3, p_4 ne sont pas toutes déterminées en général, attendu qu'elles ne sont liées que par trois équations.

n'y a que deux points d'appui A, B, les directions de q_1 et q_2 devront être directement opposées l'une à l'autre et que q_1 A doit passer par les deux points A et B; si l'on donne trois points d'appui A, B, C, les directions des trois forces q_1, q_2, q_3 doivent être dans le plan ABC. Ainsi, dans ces deux cas, les plus importants au point de vue pratique, les directions des forces q_1, q_2, q_3 sont faciles à déterminer.

Remarquons encore que si les forces P_1 et Q_1 varient au point A, la force p_1 demeure invariable en grandeur et en direction, et la force q_1, quant à sa direction seulement : donc si Q_1 est minimum, q_1 l'est également. Cette condition revient en définitive à celle-ci, que l'angle $R_1 Ap_1$ de la réaction R_1 avec la direction de la résultante générale doit être un minimum.

D'après cela, sous la condition expresse que la position des vrais points d'application A, B, C, D des réactions R_1, R_2, R_3, R_4, dans l'intérieur des surfaces d'appui, soit donnée préalablement, le principe de la moindre résistance peut être aussi défini de cette manière : les angles des réactions avec la direction de la résultante générale du système doivent être simultanément des minimums. Les arguments que nous avons présentés pour montrer l'indétermination du minimum simultané des composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 peuvent être reproduits pour les angles $R_1 AP_1$, $R_2 BP_2$, $R_3 CP_3$, $R_4 DP_4$, dès qu'on donne plus de trois points d'appui. Ici, comme précédemment, nous ne comparons entre eux, bien entendu, que les systèmes de réactions appartenant à la même classe, dans lesquels, par conséquent, les réactions R_1, R_2, R_3, R_4 sont situées dans des plans déterminés parallèles à la résultante P : Q_1 AP_1, Q_2 BP_2, Q_3 CP_3, Q_4 DP_4.

§ 4. Observations sur la manière dont Moseley expose le principe.

L'exposition du principe dont il vient d'être question a été faite comme il suit par Moseley, dans ses *Principles of Engineering and Architecture :*

« Quand un groupe de forces est en éqnilibre et qu'il s'y trouve un certain nombre de réactions, chacune de ces dernières est un minimum eu égard aux conditions dans lesquelles se trouve le système entier. »

A cet énoncé, on peut objecter tout d'abord que les réactions du

point d'appui ou les forces elles-mêmes, désignées plus haut par R_1, R_2... ne sont pas assujetties à être des minimums, et en effet ne le sont pas dans la plupart des cas ; cette obligation existe seulement pour les composantes Q_1, Q_2,... normales à la résultante générale P.

L'énoncé de Moseley ne dit rien non plus des indéterminations qui résultent de ce que les directions des réactions R_1, R_2... ne doivent pas nécessairement varier chacune dans un même plan, mais doivent être considérées comme variables dans l'espace ; il n'indique pas davantage l'indétermination qui se présente quand on veut fixer le minimum général des forces dont il s'agit. En outre, il est admis implicitement que le système a des points d'appui, non des surfaces d'appui.

L'énoncé dont il s'agit manque donc de généralité sous plusieurs points de vue.

Enfin Moseley donne de ce principe une démonstration tout à fait inadmissible, qu'on trouvera dans son ouvrage cité plus haut [1].

APPLICATIONS DU PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

§ 5. Equilibre d'une tige pesante appuyée contre une paroi verticale et une paroi horizontale.

Pour faire apprécier l'importance du principe de la moindre résistance dans la science de l'équilibre, nous discuterons quelques cas

[1] La démonstration de Moseley est si évidemment vicieuse, qu'on ne comprend pas qu'elle ait trouvé place dans son estimable ouvrage. Nous la reproduisons ci-dessous textuellement.

" Let the pressures of the system, which are no resistances, be represented " by A, and the resistances by B; also let any other system of pressures, which " may be made to replace the pressures B and sustain A, be represented " by C.

" Suppose the system B to be replaced by C ; then it is apparent that each " pressure of the system C is equal to the pressure propagated to its point of " application from the pressure of the system A ; or it is equal to that pressure, " together with the pressure so propagated to it from the other pressures of " the system C. In the former case it is identical with one of the resistances of " the system B; in the latter case it is greater than it. Hence, therefore, it " appears that each pressure of the system B is a minimum, subject to the " conditions imposed by the equilibrium of the whole." (*The Mechanical principles of engineering and architecture.* 1843.)

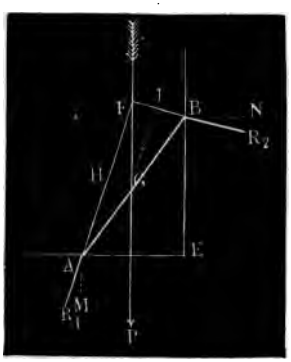
particuliers où ce principe s'applique. Nous choisirons pour premier exemple le problème suivant :

Une tige pesante AB inclinée (fig. 6) s'appuie sur le plan horizontal fixe AE, et contre le plan vertical EB ; ses extrémités A et B peuvent glisser en frottant sur ces plans. L'angle de frottement correspondant au glissement effectif sur le plan AE est φ_1, sur le plan BE, φ_2. On demande les conditions d'équilibre.

Premier cas. *Où l'on considère* AB *comme une ligne pesante, rigide et inflexible.*

Dans ce cas les surfaces d'appui se réduisent à deux points invariables A et B, et dès lors le principe de la moindre résistance sera satisfait si l'on remplit la condition que les angles R_1FP et R_2FP que font les réactions R_1, R_2 en A et B avec la direction de la résultante, c'est-à-dire avec la verticale, soient minimum.

Fig. 6.



Mais, eu égard à la disposition physique des surfaces AE et BE, il faut encore en même temps remplir la condition que les directions R_1, R_2 fassent avec les normales AM et BN des angles qui ne soient pas inférieurs aux angles limites de frottement φ_1 et φ_2. Comme enfin l'équilibre des trois forces P, R_1, R_2 exige que les directions des deux dernières se rencontrent sur la verticale de P, il s'ensuit que l'on a la direction R_2F de la réaction R_2, en prenant l'angle R_2BN aussi grand que possible, c'est-à-dire égal à φ_2, et que la direction de la réaction R_1 doit être donnée par FA. Connaissant le poids P de la tige, représenté par FG, on obtiendra les grandeurs des deux réactions par la décomposition de P suivant le parallélogramme des forces : $R_1 = FH$, $R_2 = FJ$.

Il est sous-entendu que la construction ci-dessus donnera un angle R_1AM au plus égal à φ_1. S'il était plus grand, l'équilibre serait impossible, attendu que l'angle R_2BN a été pris égal à sa valeur maximum, et ne saurait être que diminué, ce qui augmenterait encore l'angle R_1AM. Dans ce dernier cas la tige glisserait, ses deux extrémités A et B se mouvant respectivement dans les directions EA et BE.

Deuxième cas. *Où l'on considère* AB *comme un prisme incompressible et inflexible.*

Si les dimensions de la tige perpendiculairement au plan vertical AEB (fig. 7) sont nulles ou infiniment petites, il est clair que les réactions R_1 et R_2 se trouvent dans le plan qui passe par la verticale de la résultante P et par les points a, a', b, b'. D'où il suit, quand les dimensions de la tige perpendiculairement au plan AEB ne sont pas infiniment petites, mais toutefois symétriques par rapport à ce plan, que les directions des réactions R_1, R_2 se trouvent dans ce plan vertical AEB passant par le centre de gravité de la tige : on le reconnaît en décomposant par la pensée la tige en tranches infiniment minces, parallèles à AEB, et remarquant que les réactions R_1 et R_2 sont les résultantes des réactions élémentaires agissant sur chaque tranche.

Qu'on prenne maintenant sur les surfaces aa', bb', deux points quelconques A et B comme points d'application fictifs des réactions R_1 et R_2 : on trouvera les directions AF et BF de ces dernières exactement comme dans le cas précédent. Mais il faut que les composantes horizontales KF, LF, de ces réactions HF, JF, soient les plus petites qu'on puisse obtenir par la variation des points A et B sur les abouts du prisme. Il s'ensuit facilement que la réaction R doit passer par le point le plus haut b de l'about bb', et faire avec la normale à BE l'angle φ_2 du frottement, et que la réaction R_1 doit passer par le point a' de l'about aa', qui est le plus rapproché de E; elle s'obtient en joignant a' au point F' d'intersection de la direction $R_2 b$ avec la verticale F'P.

Fig. 7.

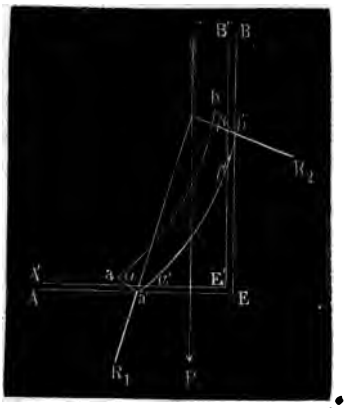
D'après cela les points b et a' seront ceux qui exerceront des pressions sur les plans d'appui, ce qui se voit avec évidence quand on se représente la tige sur le point de glisser.

Troisième cas. *Où l'on considère* AB *comme flexible.*

Dans ce cas, la pièce prend, par son poids, une courbure telle (fig. 8), que les points extérieurs a et b des abouts s'éloignent des

plans AE et BE, et les points intérieurs a' et b' demeurent seuls en contact avec ces derniers plans. D'après ces données, les réactions R_1, R_2 ne peuvent passer que par les points a', b', et leurs directions se trouveraient comme dans le premier cas, en commençant par déterminer, d'après les lois de l'élasticité, la position de la verticale passant par le centre de gravité de la tige fléchie.

Fig. 8.



Si la tige est non-seulement flexible, mais aussi soumise aux lois générales de l'élasticité, par conséquent compressible et extensible en chacune de ses parties, il s'établira en a', b' des compressions, et la tige s'appuiera contre les plans fixes par des surfaces d'étendue finie, prenant une forme telle que $a\alpha\alpha'\beta'\beta b$ (en supposant les plans fixes en A'E'B'). Les directions des réactions R_1, R_2 pourront alors ne pas passer par les arêtes des surfaces $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, mais en des points intermédiaires, qu'on pourra déterminer par les lois de la répartition de la pression élastique sur ces surfaces, en raison de la compression produite.

§ 6. Equilibre d'un coin entre deux plans inclinés.

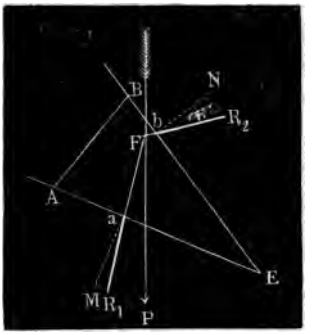
Entre les deux plans inclinés AE, BE, repose le corps ABE (fig. 9), en forme de coin, incompressible et de poids P; les faces AE, BE de ce corps peuvent développer contre les plans correspondants des frottements dont les angles sont respectivement φ_1 et φ_2 au moment où le corps commence réellement à glisser : on demande les conditions d'équilibre.

Si la verticale FP du centre de gravité du coin rencontre le plan inférieur AE en faisant, avec la normale à ce plan, un angle plus petit que φ_1, ce plan s'oppose de lui seul à l'action verticale du coin, sans qu'il se produise d'action secondaire, ni qu'aucune réaction du plan BE entre en considération.

Mais si ce cas ne se présente pas, la réaction du plan BE est né-

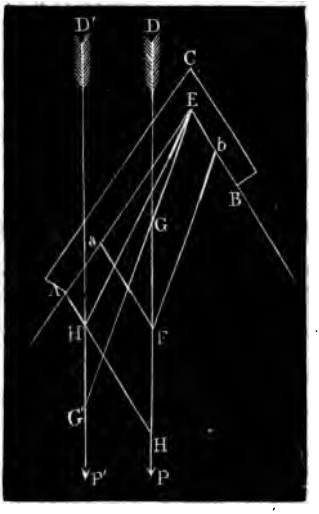
cessaire pour l'équilibre; soient alors R_1F, R_2F les directions dans lesquelles les deux plans résistent avec les intensités R_1, R_2. D'après le principe de la moindre résistance, les composantes perpendiculaires à FP de R_1 et R_2 sont des minimums : condition qui sera évidemment satisfaite si les lignes R_1F, R_2F font avec les normales aM, bN à AE, BE, les angles φ_1, φ_2. On reconnaît ensuite que dans ce cas les directions et grandeurs des réactions R_1, R_2 sont, il est vrai, parfaitement déterminées, mais que la position des points d'application a, b de ces deux forces demeure indéterminée, entre certaines limites faciles à apprécier.

Fig. 9.



Ce que nous venons de dire trouve une application importante à la détermination de la poussée d'un massif de terre contre un mur résistant BE. Il en résulte que le massif de terre derrière le mur (massif dont AE représente une surface de séparation possible) exercera toujours contre BE une poussée faisant avec la normale bN au mur un angle φ_2. Il est tout à fait indifférent pour cela que la face BE du mur soit verticale ou non.

Fig. 10.



A la catégorie dont il vient d'être question se rattache le cas représenté dans la figure 10, où un corps pesant ACB, en forme de crochet, repose sur les plans fixes EA, EB. Si la verticale DP, passant par le centre de gravité du corps, coupe le plan AE suivant une direction dont l'angle avec la normale à AE est plus petit que φ_1, ce plan résiste à lui seul à l'action du corps dirigée suivant la verticale PD. Si ce cas ne se présente pas, on trouve, d'après le principe de la moindre résistance, les directions des réactions R_1, R_2, suivant les lignes Fa, Fb, tracées d'un point F quelconque pris sur DP, de manière qu'elles fassent les

angles φ_1 et φ_2 avec les normales sur AE et BE. Mais les points d'application a, b de ces réactions demeurent variables entre certaines limites, sans que cela influe sur leurs grandeurs et leurs directions.

Cela suppose cependant qu'une ligne EG, menée par E parallèlement à bF, coupe la verticale DP plus haut que ne le fait une ligne AH menée par A parallèlement à aF. Si cela n'avait pas lieu, comme, par exemple, si la verticale du centre de gravité du corps était en D'P', on aurait le minimum, d'après le principe de la moindre résistance, en considérant A, E comme les points d'application, AH' et H'E comme les directions des réactions R_1, R_2. Alors la réaction R_1 fait avec la normale à AE l'angle φ_1, mais la réaction R_2 fait avec la normale à BE un angle plus petit que φ_2.

§ 7. Stabilité d'un Vagon sur des rails.

Nous nous proposons d'examiner, ci-après, de quelle manière la stabilité d'un vagon dépend de la forme de ses bandages de roues et de celle des rails. Nous ne tiendrons aucun compte des mouvements latéraux et des actions latérales provenant des inégalités de la voie, du défaut de symétrie dans la construction ou dans le chargement du vagon, des ressorts, enfin des oscillations et secousses accidentelles. Nous supposons un mouvement uniforme du vagon, se produisant dans des conditions normales, sous l'influence d'une traction et d'une force centrifuge constantes.

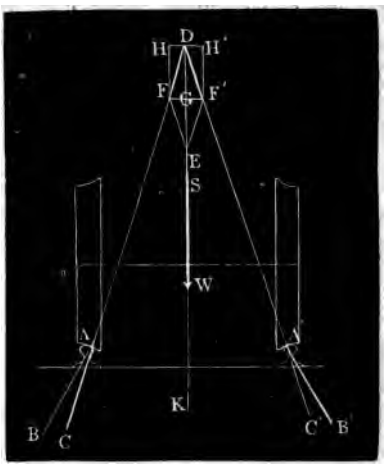
Nous considérons aussi le système d'un vagon reposant sur plusieurs essieux comme un corps reposant sur un axe unique chargé, ce qui, pour le mouvement en courbe, ne conduit pas tout à fait aux mêmes conséquences; mais cette hypothèse n'affectera pas sensiblement le résultat pour le but que nous nous proposons actuellement.

Un vagon en repos ou courant en ligne droite reposera symétriquement sur les rails (fig. 11). A l'état de repos, il est vrai, on peut supposer une position dyssymétrique dans certaines limites (nous y reviendrons); mais dans la marche en ligne droite et sans action perturbatrice, il ne peut y avoir que symétrie.

Soient : S le centre de gravité du vagon; DSK la verticale du point S; W le poids du vagon, représenté par la longueur SW; A, A' les points de contact des bandages avec les rails; CA, C'A' les

directions suivant lesquelles les rails résistent, et inversement AC, A'C' les directions des pressions du vagon sur les rails ; AB, A'B' les normales communes aux rails et aux bandages aux points de contact A, A'; φ l'angle de frottement de la matière du bandage sur celle des rails, soit arc tang. f, f étant le coefficient de frottement pour les matières dont il s'agit (en moyenne $\varphi = 16° \frac{3}{4}$, tang. $\varphi = f = 0{,}30$).

Fig. 11.



A cause de la position symétrique du vagon, la verticale DSK partage en deux parties égales l'horizontale AA', et les lignes CA et C' A' font des angles égaux avec cette verticale. Par le principe de la moindre résistance, les lignes CA, C'A', suivant lesquelles résistent les rails, seront aussi près de la verticale que possible, de manière à rendre minimum la poussée horizontale contre les rails, qui s'exerce de dedans en dehors. Mais ces lignes CA, C'A' ne peuvent pas faire avec les normales BA, B'A' un angle plus grand que φ. Donc CAB=C'A'B'=φ.

Comme on connaît par les dimensions du vagon et des rails les points A, A' aussi bien que la courbure des champignons en ces points, et par suite la direction des normales AB, A'B', on aura par la relation qui précède les directions des réactions CA, C'A', connaissant seulement l'angle φ.

Soit D le point où les prolongements de CA et C'A' rencontrent la verticale DSK. On fait DE=SW=W, poids du vagon, et on décompose DE, par le parallélogramme des forces, dans les composantes DF, DF'; celles-ci représentent la pression qui s'exerce en A, A' et dans les directions AC, A'C' contre les rails.

Les composantes horizontales et verticales de DF, DF' sont respectivement GF, DG, GF', DG. Chaque rail reçoit une pression verticale DG=$\frac{1}{2}$W, et une poussée horizontale GF=GF' de dedans en dehors. Celle-ci n'est nulle que quand les verticales menées par A et B font avec AB, A'B' des angles inférieurs à l'angle du frotte-

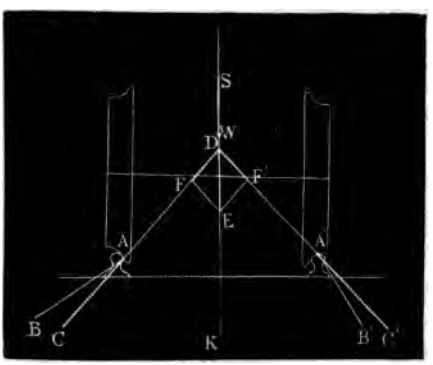
ment ; cela aura lieu certainement si la surface de contact en A, A′ est horizontale.

Si les directions AC, A′C′ rencontrent la base des rails eux-mêmes, le poids du vagon donnera lieu à une tendance au déplacement du rail sur son support, mais non au renversement ou retournement du rail. Ce dernier mode d'effort se produirait au contraire si les directions AC, A′C′ étaient assez peu inclinées pour atteindre le niveau des supports en dehors du pied des rails.

On a remarqué plus haut qu'un vagon au repos peut avoir aussi une position non symétrique sur les rails. Cherchons les limites extrêmes du déplacement latéral possible. Si le vagon est poussé de droite à gauche par rapport à une position symétrique, le contact s'établira (fig. 12), d'après la forme généralement en usage pour les rails et les bandages, entre des parties plus inclinées du côté gauche, et du côté droit entre des parties moins inclinées des bandages et des rails, de sorte que la normale AB à gauche se rapprochera de l'horizontale, et A′B′ à droite de la verticale.

Si, en continuant à pousser le vagon, on s'approche de la position au delà de laquelle le vagon ne peut plus être en équilibre, mais revient nécessairement de gauche à droite, la ligne CA de la réaction du rail à gauche passe au-dessous de AB, tandis que C′A′ à droite passe au-dessus de A′B′.

Fig. 12.



Par le principe de la moindre résistance, les réactions CD, C′D′ seront toujours aussi inclinées que possible. Donc l'angle CAB, qui ne peut être plus grand que φ, sera toujours égal à φ, tandis que C′A′B′ sera plus petit que φ. Dès que la limite extrême de l'équilibre possible est atteinte, le dernier angle C′A′B′ devient aussi égal à φ.

En dépassant cette limite, l'angle CAB demeurerait, il est vrai, égal à φ ; mais C′A′B′ deviendrait plus grand que φ. Dans ces circonstances il n'y a pas d'équilibre possible ; le vagon glisse de gauche à droite et demeure dans la position limite où CAB $=$C′A′B′$=\varphi$.

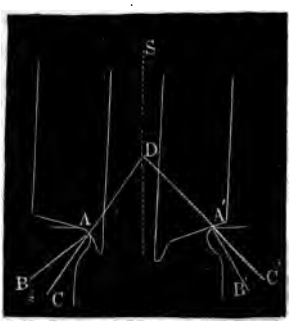
Connaissant la forme du rail et du bandage et la grandeur de l'angle du frottement φ, on peut obtenir à chaque instant la position limite, ci-dessus définie, du vagon. Pour cette position la ligne de réaction CA doit être au-dessous de la normale BA, l'angle CAB doit être égal à φ ainsi que C'A'B'; enfin les prolongements CD, C'D' de ces deux lignes de réaction doivent se rencontrer sur la verticale SK qui passe par le centre de gravité S du vagon. Dans le déplacement et l'inclinaison correspondante du vagon, le centre de gravité S conserve bien sa position relativement au vagon, mais non relativement au rail ; il faut tenir compte de ce changement. On trouvera ainsi la position du point d'intersection D des trois lignes CD, C'D et SK. Ce point D se trouvera soit au-dessus, soit au-dessous du centre de gravité du vagon.

Si l'on ne connaissait pas l'angle de frottement, on pourrait obtenir pratiquement les points D, A, A', en poussant le vagon latéralement jusqu'à ce qu'il commençât à revenir. On observerait les points A, A' correspondant aux positions limites, et l'on aurait les normales AB, A'B'. On tracera ensuite CD, C'D de manière qu'elles soient toutes deux à droite des normales AB, A'B', qu'elles fassent avec ces droites des angles égaux, et qu'elles se coupent sur la verticale qui passe par le centre de gravité.

Ayant le point D, on fait DE = W, poids du vagon, on décompose ce poids en ses deux composantes DF, DF' suivant les directions DC, DC' : ces composantes représentent les pressions que supportent les rails aux points A, A'.

Lorsque les lignes AC, A'C' atteignent l'arête extérieure de la base des rails ou la dépassent, il se produit un effort de déplacement ou de renversement des rails.

Fig. 13.

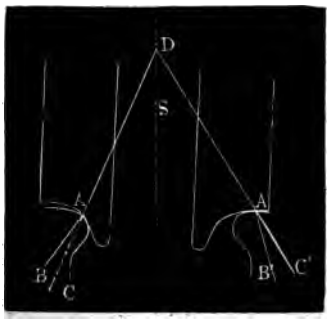


Le point D, dont la position est importante, ainsi qu'on le verra par la suite, peut être amené à la hauteur qu'on veut par une forme appropriée tant des rails que des bandages. On peut donc faire en sorte qu'il soit plus haut que le centre de gravité ou plus bas. On abaisse le point D le plus possible en employant des rails à tête aplatie, à forte courbure sur les côtés, et des bandages à boudins très-inclinés (fig. 13). On l'élève le plus

possible avec des rails très-bombés de la tête et des bandages dont les boudins ont des courbes de raccordement adoucies (fig. 14).

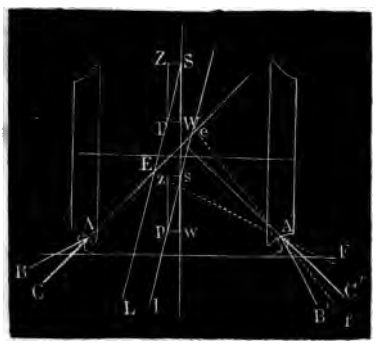
Le centre de gravité du vagon s'élève quand on le charge : si donc le point D est déjà au-dessous du centre de gravité du vagon vide, il sera à plus forte raison au-dessous du centre de gravité du vagon chargé. Si le point D est au-dessus du centre de gravité du vagon vide, il peut se faire néanmoins qu'il se trouve au-dessous du centre de gravité après le chargement.

Fig. 14.



Considérons maintenant l'action de la force centrifuge sur un vagon marchant en courbe. Soit Z la valeur de cette force qui agit horizontalement, appliquée au centre de gravité du vagon. Si l'on fait un rectangle sur W et Z (fig. 15), la diagonale de ce rectangle $SP = \sqrt{W^2 + Z^2} = P$ est la résultante de toutes les forces agissant sur le vagon, laquelle doit être tenue en équilibre par la réaction des rails. Donc les directions de ces réactions doivent se rencontrer en un seul et même point de la direction SL de cette résultante.

Fig. 15.



Il est clair que le vagon, tendant à s'écarter suivant la tangente, se déplacera latéralement sur les rails, autant qu'il sera possible. On peut se demander s'il y aura encore pour le vagon soumis à cette influence additionnelle de la force centrifuge une position extrême contre les rails, ou si au contraire le vagon déraillera par l'effet de la vitesse acquise ; dans le cas où il y aurait une position extrême, on peut se demander aussi si cette position est en deçà ou au delà de la position limite d'un vagon au repos.

Soient A, A′ les points d'appui pour la position extrême d'un vagon au repos ; les angles CAB, C′A′B′ sont égaux à l'angle de frottement φ. Conservons au point D la signification connue, et supposons d'abord que le point D se trouve au-dessous du centre de gravité S du vagon. Alors la direction de la résultante SP

coupe la ligne CD en un point E situé, par rapport à D, du côté de A. Concevons que A, A′ soient deux points d'appui possibles du vagon, E sera le point d'intersection commune des réactions en A, A′ et de la force P.

Mais si l'on mène par E et A′ la ligne EF, on voit facilement que l'angle FA′B′ est plus grand que C′A′B′, c'est-à-dire plus grand que φ. Donc il devrait se développer sur les rails dans la direction EA′ une pression faisant avec la normale A′B′ un angle plus grand que φ : le vagon ne pourra donc rester en équilibre. Il marchera, non de droite à gauche, mais de gauche à droite, de sorte qu'il rentrera vers l'intérieur du rail, et que le point E remontera sur la ligne SL : sans quoi l'angle FA′B′ ne pourrait qu'augmenter.

Ainsi, dans le cas où le point D est au-dessous du centre de gravité S, il y aura une position limite pour laquelle le vagon continue sa marche sur la courbe. Mais ce qui est le plus remarquable, c'est que cette position limite est moins éloignée de la position symétrique que ne l'est la position limite répondant au cas du repos parfait. *Plus la force centrifuge sera intense, plus le vagon se rapprochera du milieu du rail, ou moindre sera l'effort de la roue extérieure pour sauter par-dessus le bord du rail correspondant.*

Quelque paradoxale que paraisse cette proposition, elle est exacte, mais il faut se garder de la mal comprendre : elle n'établit pas que la poussée horizontale contre le rail extérieur diminue quand la force centrifuge augmente, ce qui serait absurde, mais que l'effort de la roue pour monter sur le rail extérieur diminue [1].

Un vagon ainsi construit peut sortir des rails, si la force centrifuge augmente suffisamment par une vitesse énorme ou une courbure trop prononcée, de sorte que la direction SL de la résultante P tombe à gauche du rail A ; mais alors il tournera autour du rail A comme axe de rotation dans sa chute. Il faudrait d'ailleurs

[1] On trouvera aussi dans les *Annales des Ponts et Chaussées* un théorème intéressant démontré par M. Reynard (1843, 2e semestre), lequel établit qu'un vagon à quatre roues, reposant sur les rails avec un certain jeu, se tient, dans la marche en courbe, d'autant plus près d'être parallèle à la tangente à la courbe, ainsi se rapproche d'autant plus du rail extérieur par ses roues de derrière, et par conséquent parcourt la courbe avec d'autant plus de facilité que la force centrifuge est plus grande. (*Note de l'auteur.*)

pour cela une vitesse prodigieuse ou une courbure singulièrement roide ; la pratique ne peut présenter le cas dont il s'agit.

Inversement on peut énoncer la conclusion suivante : Si un vagon au repos, amené préalablement à sa position d'équilibre limite, puis tiré horizontalement en dehors, en son centre de gravité et avec une force constante, commence par glisser avec le point A en se rapprochant du milieu du rail, puis se renverse en tournant autour du rail A ; alors on sera assuré que ce même vagon ne pourra pour aucune vitesse dérailler dans les courbes en montant par ses roues extérieures sur les rails, et de plus aucune des vitesses usitées dans la pratique ne pourra le renverser de la manière décrite ci-dessus.

Admettons maintenant que le point D soit au-dessus du centre de gravité : soit s ce centre de gravité, $sw = W$ le poids du vagon, $sz = Z$ la force centrifuge, $sp = \sqrt{W^2 + Z^2} = P$ la résultante de ces deux forces. Le prolongement de sp rencontrera cette fois CD en un point e situé au delà de D. Considérons encore A, A′, qui correspondent à la position limite du vagon au repos, comme les points d'appui du vagon soumis à la force Z. L'effort exercé en A′ devrait être dirigé suivant la ligne ef qui passe par A′. Mais on voit que fA′B′ est plus petit que φ, si même il n'arrive pas que A′f passe à gauche de A′B′. Puisque l'inclinaison de la réaction du rail A′ n'a pas atteint son maximum, le vagon n'est pas encore dans une position limite. Il peut prendre une position plus déviée vers la gauche, pour laquelle le point e descendra le long de el.

D'après cela, dans la course en courbe la traction suivant la tangente fera naître une tendance à atteindre la position limite ; le vagon dépassera donc, même pour la courbe la plus aplatie, la position limite répondant au repos. Ces limites nouvelles, qu'on peut déterminer par le même principe, comme on a déterminé les limites du repos, varieront avec les vitesses et les rayons de courbure, ou directement avec la valeur de la force centrifuge. En général, un accroissement de la force centrifuge entraîne une position limite plus écartée, une montée plus considérable de la roue sur le rail extérieur, et l'on se rapproche du déraillement.

Tant que le point e, qui se déplace continûment, demeure au-dessus du centre de gravité, les mêmes considérations trouvent leur application. En supposant des têtes de rails suffisamment courbes

et des boudins aplatis correspondants, on peut faire en sorte que la roue A monte, par la partie inférieure de son boudin, sur le sommet du rail A, d'où il suit que, les roues extérieures passant par-dessus le rail, le déraillement a lieu.

Mais, si le boudin descend assez bas pour que le vagon demeure encore sur les rails au moment où le point *e* se confond avec le centre de gravité *s*, un accroissement nouveau de la force centrifuge ne sera plus capable de faire sortir le vagon de cette position qu'il occupe à ce moment. En effet, supposons que le point D, par exemple, soit en même temps le centre de gravité : toute résultante P dont la direction se trouve dans l'angle ADA′ pourra se décomposer suivant les directions DA, DA′, allant aux deux points A, A′. Le vagon ne pourra quitter cette position, qu'il aura conservée pendant toute la période intermédiaire, que si la force centrifuge devient assez grande pour que la direction *sl* de la résultante sp=P passe au delà de ce point d'appui A répondant à la position limite dont on vient de parler. Alors il se renversera comme le vagon considéré d'abord, en tournant autour du rail A, ce qui ne pourrait se produire dans une courbe de chemin de fer que sous l'influence d'une vitesse immense.

Inversement, on peut établir cette proposition : si un vagon en repos, après être amené dans la position limite et tiré horizontalement en dehors en son centre de gravité, commence par glisser en dehors sous l'influence de cette traction croissante, et que ses roues extérieures finissent par monter sur le sommet du rail ; ce même vagon, mis en mouvement dans une courbe, quittera les rails en montant par-dessus le rail extérieur, si l'on augmente la rapidité du mouvement ou la roideur de la courbe ; et, dans ce cas, il ne faudra pas pour cela donner à ces variables des valeurs exagérées, mais bien des grandeurs se réalisant fréquemment dans la pratique.

Ou bien, si les rails et les bandages sont profilés à cet effet, le même vagon pourra être dérangé, par la traction horizontale exercée en son centre de gravité, de la position limite correspondant au repos dans une autre position où il se maintiendra un certain temps, jusqu'à ce qu'une suffisante augmentation de cette force le renverse par-dessus le rail A. Un tel vagon ne sortira pas du rail quand la vitesse croîtra, mais il descendra le long du rail jusqu'à une certaine position, où il demeurera malgré l'accroissement continu de la vitesse, jusqu'à ce que la force centrifuge devienne capa-

ble de le renverser complétement par rotation autour du rail A.

Ceci est un état intermédiaire dans lequel se rencontrent, combinés jusqu'à un certain point, les phénomènes correspondant aux deux cas considérés.

Si, comme l'exige une bonne construction de la voie, le rail extérieur dans les courbes est maintenu plus haut que le rail intérieur, cela modifiera d'une quantité facile à apprécier le déplacement du vagon dans sa position limite. Si le rail extérieur est tellement exhaussé que la résultante P soit normale à la ligne passant par les sommets des deux rails, la position limite du vagon dans la courbe devient la même qu'en voie droite ; si l'exhaussement est moindre, la position limite est comprise entre celle qui répond à la voie droite et celle qui aurait lieu pour la même courbure, si les rails étaient posés horizontalement.

Le point D, qui occupe une position constante dépendant seulement de la construction du vagon et de la voie, joue, pour la stabilité d'un vagon courant sur une voie à rails, un rôle analogue à celui que joue le point appelé par Bouguer *métacentre*, pour la stabilité d'un bâtiment flottant sur l'eau.

LIVRE II.

THÉORIE DES VOUTES.

CHAPITRE I.

ARCS A DEUX MOITIÉS SYMÉTRIQUES.

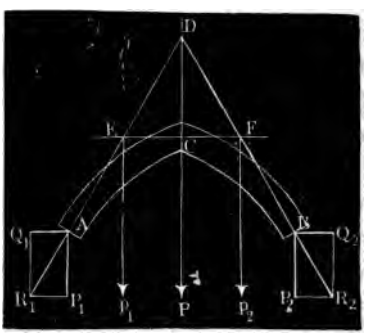
SECTION A.

ÉQUILIBRE DE ROTATION SOUS DES CHARGES VERTICALES SYMÉTRIQUES.

§ 8. Généralités.

Pour plus de simplicité, nous considérerons d'abord une voûte formée de deux branches AC, BC (fig. 16), symétriques et juxtaposées, et comprises entre deux plans verticaux parallèles[1]. Cet arc est supposé chargé non-seulement de son poids, mais d'autres poids quelconques distribués symétriquement de part et d'autre du sommet C. Cet arc, composé de voussoirs isolés en forme de coins, formés de *matériaux incompressibles,* s'appuie contre deux culées par ses extrémités A et B. La masse de la voûte est soumise aux lois du frottement dans ses joints; on ne tient pas compte de l'adhérence, difficile à évaluer, du mortier qui peut s'y trouver interposé[2].

Fig. 16.



[1] Perpendiculaires à l'axe de la voûte. Ce sous-entendu s'applique à tout ce livre, qui laisse entièrement de côté les voûtes biaises.

[2] On dira plus loin quelques mots du rôle de l'adhérence des mortiers. Voir le paragraphe 22 ci-après (*note*).

Pour étudier la stabilité de la construction composée de la voûte et de ses culées, nous chercherons les conditions d'équilibre de la voûte en elle-même, considérée comme s'appuyant sur des culées fixes. Cette recherche nous fera connaître en même temps les pressions que la voûte exerce contre ses appuis en A et en B.

Si l'on a des surfaces d'appui assez solides, par exemple une voûte établie entre deux parois de rocher, il n'y a pas à s'occuper de la stabilité de la culée. Si les culées sont formées de masses de maçonnerie susceptibles de déplacement ou de renversement, il faudra chercher si elles demeurent en équilibre sous l'action des forces qui les sollicitent. A cet effet, on considérera les culées comme formées d'assises isolées en continuation de la voûte, et l'on étendra à ces massifs, jusqu'au niveau de la plate-forme de fondation, les études qui se rapportent à la voûte. Cependant les culées très-massives, surtout quand elles sont construites avec soin, doivent être considérées comme des corps indécomposables, et se déplaçant ou se renversant tout d'une pièce.

Eu égard à la forme symétrique des deux demi-arcs par rapport au sommet, il est clair que les points d'application A et B des réactions R_1, R_2 des surfaces d'appui seront aussi symétriques par rapport à la verticale DP passant par le sommet, et que la ligne AB sera horizontale de quelque manière que les points A et B varient sur les surfaces d'appui. Si l'on décompose les réactions R_1, R_2 en leurs composantes horizontales et verticales P_1, Q_1 et P_2, Q_2, on aura $P_1 = P_2 =$ le poids d'une demi-voûte avec sa surcharge, et la poussée $Q_1 = Q_2$ doit, d'après le principe de la moindre résistance, être un minimum.

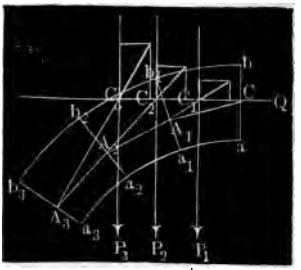
Considérons maintenant une des deux moitiés, par exemple AC; soit EP_1 la verticale passant par le centre de gravité de cette moitié chargée ; pour tenir cette masse en équilibre, il faut qu'il existe au sommet une force dont la direction CE passe par le point d'intersection E de la verticale EP_1 avec la direction de la réaction R_1. Comme la composante verticale de R_1 égale le poids P_1 agissant en E, on en conclut sans difficulté que la tension au sommet C de la voûte est nécessairement égale à la seconde composante Q_1 de la réaction R_1, et doit être horizontale comme elle.

D'après cela il est permis de ne considérer qu'une demi-voûte AC et de chercher la condition d'équilibre de cette partie, appuyée en A contre une surface fixe, et sollicitée en C par une force horizontale;

dans le cas où l'équilibre a lieu, on cherchera quelle est la moindre valeur de cette force horizontale Q_1, et quel est son point d'application.

Soient ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ (fig. 17), les joints d'un arc quelconque; P_1, P_2, P_3, les directions verticales des poids des parties $abb_1 a_1$, $abb_2 a_2$, $abb_3 a_3$, en y joignant les surcharges qui agissent sur l'extrados en bb_1, bb_2, bb_3, ces charges pouvant consister en des masses continues ou en des poids isolés; soit Q une force horizontale appliquée au point C du joint supérieur, laquelle coupe les directions des poids P_1, P_2, P_3 en C_1, C_2, C_3, et qui tient la voûte en équilibre, de concert avec la réaction R_1 qui agit sur le joint inférieur $a_3 b_3$.

Fig. 17.



On trace aux points C_1, C_2, C_3 des rectangles sur les forces qui se correspondent, Q et P_1, Q et P_2, Q et P_3; on tire les diagonales, qui donnent en grandeur et en direction les résultantes de ces systèmes de forces, et on les prolonge jusqu'à leur intersection en A_1, A_2, A_3, avec les joints $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Les points C, A_1, A_2, A_3 représentent les points d'application des forces qui agissent sur les joints ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, dans les directions QC, $C_1 A_1$, $C_2 A_2$, $C_3 A_3$. Il est clair que la surface fixe $a_3 b_3$ doit résister en A_3, avec une force R_1 qui agit dans la direction $A_3 C_3$ et dont la composante verticale égale P_3, ou le poids de l'arc $abb_3 a_3$ accru des charges, tandis que sa composante horizontale a la valeur Q.

Cela posé, pour que l'arc puisse demeurer en équilibre sous l'influence de la force horizontale Q, il faut :

1° Que les points d'intersection C, A_1, A_2, A_3, tombent dans l'intérieur des joints respectifs ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Si pour un joint quelconque il n'en était pas ainsi, que, par exemple, le point A_2 fût au-dessus de b_2, la masse $abb_2 a_2$ tournerait autour de l'arête b_2 et se renverserait. La condition précédente assure ainsi l'équilibre de l'arc contre la rotation autour d'une arête de joint quelconque.

2° Que les directions QC, $C_1 A_1$, $C_2 A_2$, $C_3 A_3$, des pressions exercées sur les joints, fassent avec les normales aux joints respectifs des angles qui ne dépassent pas l'angle de frottement. S'il n'en était pas ainsi, par exemple au joint $a_2 b_2$, la masse $abb_2 a_2$ glisserait sur ce

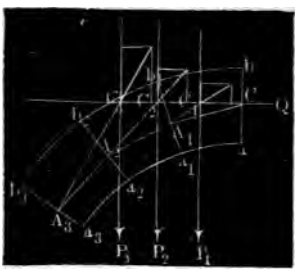
joint dans la direction a_2b_2. Cette condition assure l'équilibre contre le glissement sur un joint.

Comme le frottement des matériaux employés à la construction des voûtes est presque toujours assez fort pour que la chute de l'arc par suite du glissement ne soit point à craindre, cette dernière condition sera d'abord laissée de côté dans les paragraphes suivants, où l'on supposera qu'il n'y a pas de danger de rupture de cette manière. En conséquence, l'équilibre dont il va être question en premier lieu est relatif à la rotation possible autour d'une arête : on reviendra plus tard sur l'équilibre de glissement.

§ 9. Courbe des pressions.

Si l'arc compris entre ab et a_2b_2 (fig. 18) n'a qu'un nombre fini de joints, la ligne $CA_1A_2A_3$, qui passe par les points d'application des forces agissant sur les joints successifs, et qui doit se nommer ligne des pressions, est une ligne brisée. Si, cependant, pour généraliser la recherche, on considère fictivement la voûte comme composée d'une infinité de voussoirs infiniment minces, la ligne des pressions deviendra une courbe continue (passant entre autres points par C, A_1, A_2, A_3), pourvu que la charge supportée par l'arc soit continue suivant une loi quelconque.

Fig. 18



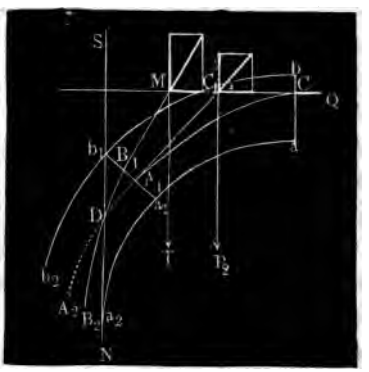
La charge continue se compose ordinairement du poids de la voûte et des murs ou remblais qui la surmontent, composés de matériaux distribués continûment; si, outre cette charge, il se trouve en quelques points, symétriquement placés sur les deux demi-voûtes, des poids isolés à soutenir, la courbe des pressions aura des points singuliers en ces divers lieux.

Supposons, par exemple, que le point b_1 de l'extrados doive soutenir le poids S (fig. 19) qui exerce son action sur la partie $b_2b_1a_1a_2$, située au-dessous du joint b_1a_1, et non sur celle qui est située au-dessus. La combinaison de la poussée horizontale Q avec le poids P_1 agissant sur b_1baa_1 donnera pour point de rencontre de la courbe des pressions et du joint b_1a le point A_1. Soit T= P+S, soit MT la verticale qui

représente la résultante de P_1 et S, soit MB_1 la diagonale du rectangle fait sur Q et T : l'intersection de cette diagonale avec b_1a_1 donne le point de départ B_1 de la partie inférieure de la courbe des pressions. Cette courbe se trouvera ainsi brisée en ce joint, et aura deux branches distinctes, CA_1, B_1B_2.

Il est facile de voir que le point B_1 est toujours compris entre A_1 et b_1, et ne peut tomber ni dans la direction A_1b_1 au delà de b_1, ni dans la direction b_1A_1 au delà de A_1, soit que le point A_1 tombe dans l'épaisseur de la voûte, soit qu'il se trouve en dehors sur le prolongement du joint a_1b_1[1]. Si A_1 vient en b_1, B_1 vient pareillement en b_1.

Fig. 19.



Supposons qu'en conservant la grandeur et le point d'application de la poussée Q on supprime le poids S, et qu'ainsi la courbe des pressions soit la ligne continue CA_1A_2 ; soit D le point d'intersection de cette courbe avec la verticale Sb_1N passant par b_1. En général ce point d'intersection sera unique ; dans certains cas il peut être multiple. Rétablissons maintenant le poids S sans toucher à Q : il se produira la courbe des pressions discontinue $CA_1B_1B_2$, dont la partie supérieure CA_1 reste identique à celle précédemment existante, et dont la partie inférieure B_1B_2 coupe celle A_1A_2 de la courbe précédente au point D, tous les autres points se trouvant compris entre la courbe A_1A_2 et la verticale SN.

Si le joint b_1a_1, sur l'arête supérieure duquel agit ce dernier poids S, était vertical comme le joint au sommet *ba*, les trois points A_1, B_1 et D coïncideraient, et la courbe des pressions y formerait un *point saillant*. S'il s'agit du joint *ab* lui-même, on supposera que la voûte, formée de ses deux parties concourantes et symétriquement chargées, supporte en son sommet le poids 2S, dont une moitié S doit être attribuée à la demi-voûte de gauche, et l'autre à la demi-voûte de droite.

On aurait encore un point saillant en considérant ces courbes de

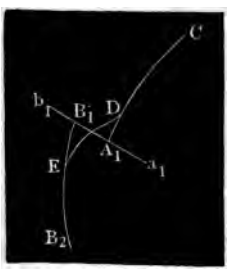
[1] En effet, le point A_1 est la position limite de B_1 pour $S = 0$, et b_1 est la position limite de B_1 pour S infini.

pressions particulières qui passent par le point b_1; ce qui ferait coïncider les points A_1, B_1, D et b_1.

Si le point A_1 se trouve en dehors de la voûte et dans le prolongement de a_1b_1 vers le haut, de sorte que le point B_1, compris entre A_1 et b_1, soit inférieur à A_1, l'intersection D de la verticale SN avec la courbe primitive CA_1A_2 sera entièrement en dehors de la nouvelle branche B_1B_2; cette dernière branche restera alors, dès son point de départ B_1, à droite de A_1A_2, et son prolongement virtuel au-dessus du point B_1 irait seul passer en D.

Remarquons qu'en réalité un effort fini ne peut jamais s'exercer sur un élément mathématique d'un corps naturel, que cet effort se répartit suivant une loi continue sur une certaine étendue, plus ou moins restreinte, des deux côtés du point considéré; qu'ainsi vers les extrémités de cette étendue l'action de la force décroît successivement jusqu'à zéro : il s'ensuit que la courbe des pressions, même dans le cas traité ci-dessus, sera toujours une courbe continue, qui présentera seulement dans le voisinage du joint b_1a_1 deux fortes courbures opposées et un point d'inflexion, comme le représente la figure $CDEB_2$ (fig. 20).

Fig. 20.



La figure de la partie DE, fortement recourbée, ne pourrait être tracée avec exactitude qu'autant qu'on connaîtrait la loi d'après laquelle la pression S se répartit sur les molécules voisines. Faute de cette connaissance, on tracera la courbe brisée $CA_1B_1B_2$, et on y insérera au jugé le segment DE, de manière à se ramener au cas d'une courbe des pressions non interrompue et continue, ce qui est supposé dans toutes les recherches qui vont suivre.

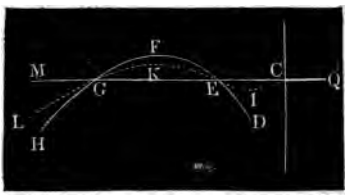
§ 10. Propriétés générales de la courbe des pressions.

Les propriétés suivantes ont de l'importance pour les recherches ultérieures. Elle se démontrent facilement sous cette seule restriction que les joints ba, b_1a_1, b_2a_2, ... ne feront nulle part avec la verticale supérieure, à gauche de cette verticale, un angle plus grand que 90°, ce qui comprend tous les cas d'application.

1° Soit DEFGH (fig. 21) la courbe qu'on obtient en prolongeant les

verticales passant par les centres de gravité des poids P_1, P_2, P_3, ..., jusqu'à leur rencontre avec les joints correspondants, et en joignant ces points d'intersection par un trait continu, que ces points soient au dedans ou au dehors de la voûte.

Fig. 21.



Soit C le point d'application d'une force horizontale Q agissant sur le joint du sommet, et déterminant une courbe des pressions qui passera en C. L'horizontale CM passant en C rencontrera la première courbe en un nombre quelconque de points, comme E, G, de sorte que certaines parties de courbe, DE, GH seront au-dessous, d'autres, EFG, au-dessus de cette horizontale. La courbe des pressions qui commence en C, telle que CIEKGL, quelle que soit la valeur de Q correspondante, passera en C, E, G; en outre, les parties CIE, GL seront toujours au-dessous de l'horizontale CM, mais entre cette ligne et les portions de courbe DE, GH; les parties comme EKG seront toujours au-dessus de cette horizontale, mais entre elle et les parties de courbe comme EFG.

Ce qui vient d'être dit de la position de la courbe des pressions entre l'horizontale CM et la courbe DEFGH est vrai, quand même l'horizontale CM ne rencontre pas cette courbe, et demeure tout entière au-dessus, ou tout entière au-dessous.

2° Dans presque tous les cas des applications, DEFGH forme une courbe dont tous les points sont plus bas que le point inférieur du joint au sommet de la voûte, de sorte qu'en général l'horizontale CM est au-dessus d'elle tant que le point C à la clef est dans l'intérieur de la voûte. Cette courbe représente évidemment la courbe des pressions particulière répondant au cas de $Q = 0$, pour laquelle, par conséquent, la position du point d'application de la force nulle au sommet est indéterminée.

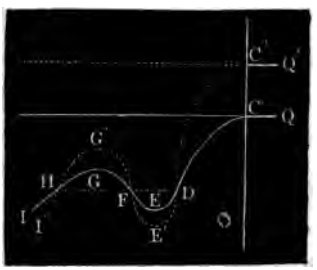
3° Mais si l'on augmente la force Q, en conservant son point d'application, on trouve, au lieu de la ligne CIEKGL, une nouvelle courbe des pressions qui passe, il est vrai, en C, E, G, mais qui se trouve comprise aux autres points entre l'horizontale CM et la première courbe des pressions, de sorte que les parties CIE, GL, s'élèvent, tandis que celles EKG s'abaissent : ce qui fait que toutes les parties se rapprochent de l'horizontale CM. Si, au contraire, le point d'application C restant constant, on diminue la force Q, la nouvelle

courbe des pressions, passant toujours en C, E, G, s'éloigne en ses autres points de l'horizontale CM, les parties CIE, GL s'abaissant, EKG s'élevant.

4° Si l'on fait mouvoir le point C sur sa verticale sans changer la grandeur de Q, la nouvelle courbe des pressions s'élèvera ou s'abaissera tout entière par rapport à CIEKGL, sans avoir avec cette dernière aucun point commun, suivant que le point C montera ou descendra.

5° Si l'on fait varier à volonté la grandeur et le point d'application de la force Q tout à la fois, on obtient des courbes des pressions qui se coupent mutuellement. Mais deux telles courbes, qui se coupent en un point quelconque D (fig. 22), se coupent aussi en tous leurs points situés sur l'horizontale du point D, et ne se rencontrent en aucun point au-dessus ou au-dessous de cette horizontale. Il s'ensuit que la rencontre en des points tels que D, qui n'ont pas la tangente horizontale, est nécessairement une intersection et non un contact, et, au contraire, la rencontre aux points maximums C, E, G, est nécessairement un contact. (Cette conséquence se tire immédiatement de la proposition qui précède, en regardant le contact de deux courbes comme la coïncidence en deux points infiniment voisins, ou sur un élément de longueur.)

Fig. 22.



Pour démontrer les propositions qui précèdent, soit P_1 le poids qui répond au joint que la courbe des pressions CEGI traverse au point D ; soit p_1 la distance du point D à la verticale du centre de gravité du poids P_1. Le moment du poids P_1 par rapport à D est ainsi P_1p_1. Soit Q la pression horizontale en C, z la profondeur du point D au-dessous de l'horizontale du point C. zQ est le moment de Q ; et, D étant un point de la courbe des pressions, on a la relation caractéristique

$$zQ = P_1p_1.$$

Soit F un autre point de la même courbe, à la même hauteur que D ; soient P_2, p_2 le poids et la distance correspondant au point F :

$$zQ = P_2p_2, \text{ d'où } P_1p_1 = P_2p_2.$$

Si maintenant une nouvelle courbe des pressions vient passer en D, $z'Q'=P_1p_1$, et par suite $z'Q'=P_2p_2$: donc elle passe en F.

Soient, au contraire, I un point de la première courbe, qui n'est pas à la même hauteur que le point D, P_3 le poids répondant au joint qui passe en I, p_3 la distance de I à la verticale du centre de gravité de ce poids, et h la différence de niveau entre I et D. On a pour toute courbe qui passe en ces deux points :

$$zQ=p_1P_1 \quad \text{et} \quad (h+z)\,Q=p_3P_3$$

d'où
$$Q=\frac{p_3P_3-p_1P_1}{h}, \text{ et } z=\frac{p_1P_1h}{p_3P_3-p_1P_1}.$$

D'après cela, dès que h a une valeur finie, ou dès que les deux points considérés ne sont pas à la même hauteur, les grandeurs Q et z ont nécessairement une valeur déterminée qui ne peut correspondre qu'à une seule courbe des pressions. Donc deux courbes différentes ne peuvent jamais se couper en deux points situés à des hauteurs différentes.

6° Les différentes courbes des pressions qu'il est possible de construire ont ceci de commun, que leurs tangentes sont horizontales au point initial C, pourvu qu'il n'existe pas un poids isolé appliqué au sommet : et si on suppose ces courbes prolongées indéfiniment dans les culées, elles tendent vers une même courbe qui leur sert d'asymptote commune.

Cette dernière courbe, dont nous avons déjà fait mention (1° et 2°), représente la courbe des pressions pour laquelle la poussée est supposée nulle : elle est formée par les points d'intersection des lignes de joints avec les poids correspondants P_1, P_2, ...

Fig. 23

7° Les propriétés précédentes s'appliquent aussi à des courbes des pressions discontinues, répondant au cas de poids isolés. En traçant les courts segments à forte courbure qui rétablissent la continuité, on reconnaîtra toujours facilement si une position relative quelconque de deux de ces courbes est possible ou non, si elles se coupent ou ne se coupent pas. Ainsi, par exemple, la position relative des courbes à traits respectivement pleins et ponctués de la figure 23, est possible et ne suppose pas d'intersection. Celle que donne la figure 24 est possible moyennant

trois points d'intersection sur une même horizontale, les courbes ne pouvant se couper sur aucune autre horizontale. La position (fig. 25) est impossible, parce que ces deux courbes se couperaient en un point sans le faire aux autres points qui se trouvent sur la même horizontale.

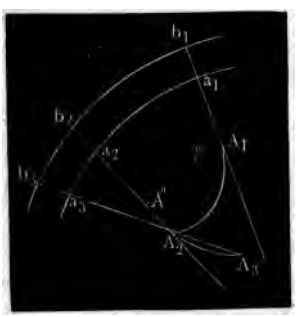
Fig. 24.

Si l'on prolonge tous les joints jusqu'à leurs points de concours au delà de la voûte, et qu'on recherche toutes les courbes des pressions imaginables auxquelles correspondent sur ces joints des points situés au delà des points de concours, on a une remarque à faire relativement à la position relative de ces courbes dans cette portion du plan.

Fig. 25.

8° Soit A_2 (fig. 26) le point de rencontre des deux joints b_2a_2 et b_3a_3. Si une courbe des pressions passait en ce point, ce point pourrait être considéré, et comme point d'application de la pression sur le joint b_2a_2, et comme point d'application de la pression sur le joint b_3a_3. Dans le premier cas, ce point, quoique se trouvant aussi dans le joint b_3a_3, n'aura pas, par rapport à celui-ci, le caractère de point correspondant de la courbe des pressions, cette propriété ne lui appartenant que par rapport au joint b_2a_2.

Fig. 26.



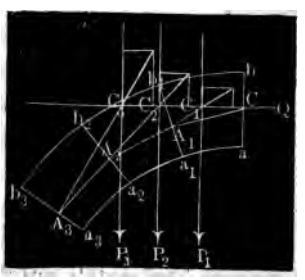
Soit, par exemple, $A_1A_2A_3$ une courbe des pressions qui passe au point A_2 considéré comme appartenant au joint b_2a_2. Elle passera en un autre point quelconque A_3 qui répondra à b_3a_3. On peut concevoir une autre courbe $A_1A''A_3$, dans laquelle A_2 a sa signification par rapport à b_3a_3, un autre point A'' répondant à b_2a_2. D'après cela il sera possible de tracer des courbes des pressions,

dans ce cas, qui se couperont en plusieurs points, à des hauteurs différentes. Mais si l'on remarque que le point A_2 n'a pas dans les deux courbes le caractère d'un point correspondant à un seul et même joint, on voit que les propriétés ci-dessus énoncées conservent toute leur généralité, pourvu que l'on substitue à l'idée trop étendue de rencontre des deux courbes celle plus restreinte de la coïncidence de deux poids représentant dans les deux courbes les points d'application sur un seul et même joint. Ainsi, en traçant la position de hauteur relative de deux courbes, on aura soin que les points d'application correspondant à un même point dans les deux courbes soient respectivement partout plus élevés ou partout plus bas : par exemple dans la courbe $A_1A''A_2$ tous les points correspondants à partir de A_1 sont plus hauts que dans la courbe $A_1A_2A_3$, quoiqu'elles aient un point commun A_2, mais à double signification.

§ 11. Définition précise des éléments à déterminer pour obtenir la vraie courbe des pressions, ainsi que le minimum et le maximum de la poussée.

Pénétrons maintenant plus avant dans la recherche des conditions d'équilibre d'une voûte. Il faut remarquer avant tout que, si la voûte est partout assez épaisse pour que les verticales passant par les centres de gravité des poids $P_1, P_2, P_3 \ldots$ coupent tous les joints correspondants dans l'intérieur de la voûte (fig. 27); en d'autres termes, si la courbe des pressions qui correspond à $Q = o$ ne sort nulle part de la voûte, il n'est alors besoin d'aucune force horizontale au sommet pour maintenir l'équilibre. (Nous admettons implicitement que les verticales font avec les normales aux joints correspondants des angles plus petits que l'angle du frottement relatif aux matériaux des voussoirs, en sorte que l'équilibre contre le glissement soit partout assuré.)

Fig. 27.



Dans ces circonstances, qui se présentent, par exemple, quand, en construisant une voûte, on n'a posé que les voussoirs inférieurs, chaque joint, ainsi que la culée, ne subissent qu'une pression ver-

ticale, et la culée n'a à supporter aucun effort horizontal. Cependant il est facile de voir que, s'il s'agissait d'un arc dont le joint au sommet fût vertical et qui se composât d'une infinité de voussoirs infiniment minces, le cas dont il s'agit ne pourrait se présenter, car pour $Q = o$ les angles des verticales C_1P_1... ou des pressions avec les normales aux joints correspondants voisins du sommet seraient nécessairement plus grands que n'importe quel angle du frottement possible. Dans ce système fictif il doit donc y avoir toujours une poussée, quoiqu'elle puisse être petite. Dans la réalité, comme aucune voûte ne se compose de voussoirs infiniment minces, le cas dont il s'agit est très-possible, quoique se présentant rarement dans la pratique courante.

Il est clair que la courbe ci-dessus considérée, qui passe par les points d'intersection des verticales avec les joints correspondants, ne se trouvera jamais au-dessus de l'extrados, mais pourra être partie au-dessus, partie au-dessous de l'intrados ; il est nécessaire toutefois de noter ce fait, auquel il faudra penser par la suite.

Cela dit, le problème est le suivant : parmi toutes les courbes des pressions possibles pour lesquelles la voûte peut rester en repos, et qui, par conséquent, en aucun point de leur développement ne sortent de l'intérieur de la voûte, depuis le joint au sommet jusqu'à la culée, trouver celle pour laquelle la poussée Q est un minimum, et qui, par le principe de la moindre résistance, sera la véritable.

Quand on appelle *minimum* cette valeur de la poussée, on n'entend pas par là un minimum analytique absolu pour lequel le coefficient différentiel de Q par rapport à une grandeur quelconque soit nul, mais la plus petite valeur de Q possible sous les conditions données du système.

A côté de cette courbe, répondant au minimum de Q, se présente celle qui correspond au maximum, et qui représente la plus grande poussée horizontale qui pourrait se produire en tenant la voûte au repos, si la production de la poussée n'était assujettie au principe de la moindre résistance.

La considération simultanée de ces deux courbes, dont la première seule cependant doit toujours être la véritable dans notre hypothèse de l'incompressibilité des voussoirs, donne des vues utiles sur le système des forces qui agissent sur une voûte.

Il est clair que si l'une de ces lignes existe, l'autre existera né-

cessairement aussi ; ce sera un cas tout particulier si elles viennent à coïncider : alors le maximum de Q sera aussi son minimum ; il ne pourra exister aucune autre courbe que celle-là. Si on a déterminé les conditions générales que doit remplir l'une ou l'autre de ces deux lignes, et que l'on trouve pour une voûte particulière que ces conditions ne sont pas remplies, alors ni l'autre courbe, ni aucune courbe des pressions pouvant assurer l'équilibre de la voûte ne subsistera : donc la voûte se rompra nécessairement.

§ 12. Caractères communs à la courbe des pressions répondant au minimum de la poussée et à celle qui répond au maximum.

La courbe des pressions qui répond à un maximum ou à un minimum de la poussée doit, sans sortir en aucune de ses parties de l'épaisseur de la voûte, avoir un point commun avec l'extrados et un avec l'intrados, et il est facile de voir qu'un tel point commun, s'il n'est pas à une extrémité de la voûte, soit au sommet, soit à la culée, est nécessairement un point de contact de la courbe des pressions avec la courbe-contour.

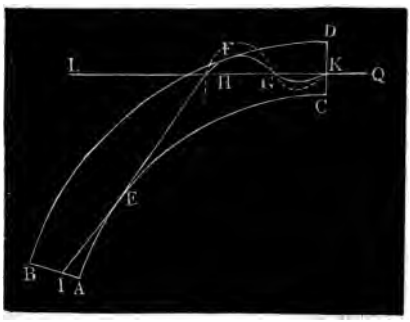
Supposons en effet qu'on puisse construire une courbe des pressions contenue en entier dans l'épaisseur de la voûte et n'ayant aucun point commun soit avec l'extrados, soit avec l'intrados : on pourra alors, sans changer le point d'application de Q à la clef, augmenter ou diminuer cette force de telle sorte que la nouvelle courbe des pressions, nécessairement différente de la précédente, atteigne d'un côté ou de l'autre le contour de la voûte, sans en sortir. La ligne d'abord construite ne peut donc répondre ni au minimum, ni au maximum de la poussée.

Si une courbe des pressions, tout entière contenue dans l'épaisseur de la voûte, touchait seulement l'une des courbes-contours, l'extrados, par exemple, mais non l'intrados, on pourrait, en conservant la grandeur de la force Q, faire marcher son point d'application vers le sommet de cette dernière courbe, de manière que la nouvelle courbe des pressions, qui d'après les propriétés exposées plus haut sera tout entière au-dessous de la première, se séparât de l'extrados et n'eût aucun point commun avec l'une ni avec l'autre des courbes-contours. Mais cette nouvelle courbe des pressions, qui correspond à la même valeur de Q que la première, com-

porte un accroissement ou une diminution de la force Q, d'après le raisonnement ci-dessus ; donc cette courbe, et par suite la première construite, ne correspond ni à un minimum, ni à un maximum de la poussée.

Il résulte de là que la courbe répondant à un minimum ou à un maximum de Q doit avoir un point sur chacune des courbes-contours. Pour définir les caractères distinctifs des courbes répondant respectivement au minimum et au maximum, il reste à déterminer la position relative de ces points de concours.

Fig. 28.



Nous ferons toutefois préalablement la remarque suivante : soit CDBA la demi-voûte (fig. 28), CD un joint vertical à la clef, AB le joint de culée, K le point d'application de la force Q, et KFEI une courbe des pressions possible quelconque ayant avec l'intrados le point E commun, avec l'extrados le point F commun. Les deux points E, F doivent toujours être au-dessous de l'horizontale KL menée par le point K, à moins que les points K, F, D ne se confondent en D, ou les points K, E, C en C, auxquels cas ces points sont non au-dessous de l'horizontale KL, mais sur cette horizontale même.

Pour le point E, cette proposition n'a pas besoin de preuves, puisque nous admettons qu'aucun point de l'intrados n'est au-dessus du point le plus bas C du joint à la clef[1]. Pour le point F, on remarquera que, s'il est au-dessus de KL, en diminuant la valeur de Q sans changer le point d'application K, la nouvelle courbe des pressions, suivant le tracé pointillé, s'abaissera entre K et G, s'élèvera entre G et H, et ainsi sortira de l'extrados. Mais alors la courbe répondant à $Q = o$ devrait, elle aussi, sortir de l'extrados, ce qui n'est pas possible, suivant une remarque faite précédemment.

Nous n'avons donc à nous occuper que des courbes des pressions

[1] Cette hypothèse, non encore énoncée sous cette forme, revient à celle du paragraphe 10 : « Les angles des joints avec la verticale supérieure sont inférieurs à 90° », sachant que les joints sont faits, au moins approximativement, normaux à l'intrados.

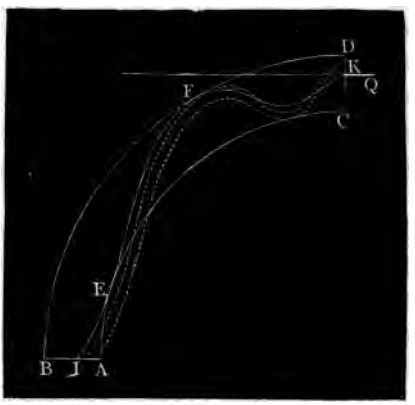
pour lesquelles les deux points connus E et F sont au-dessous de l'horizontale KL, ou tout au plus viennent sur cette ligne quand celle-ci passe en C ou en D.

§ 13. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au minimum de la poussée.

Quand le point F de contact avec l'extrados est plus haut que le point de contact E avec l'intrados, la courbe des pressions dont il s'agit répond à un minimum de la poussée, soit que le point E précède ou suive le point F quand on parcourt la courbe depuis la clef jusqu'à la culée.

En effet, soit d'abord KFEI (fig. 29) la courbe des pressions dont il s'agit, les points E, F étant dans la position voulue, et dans la deuxième situation relative que nous venons d'indiquer. Si, en conservant le point d'application K, on augmente ou diminue la force Q, la courbe va respectivement s'élever ou s'abaisser dans la partie inférieure à l'horizontale QK, et par suite sortir soit de l'extrados en F, soit de l'intrados en E : elle est donc impossible.

Fig. 29.



Si en conservant la force Q on relève son point d'application vers D, on obtient une nouvelle courbe des pressions qui est en entier au-dessus de la première, qui coupera donc l'extrados vers le point F : elle est donc impossible. Si maintenant on augmentait l'intensité de la force Q, la nouvelle courbe s'exhausserait encore dans le voisinage de F ; elle sortirait davantage de l'arc et serait encore moins possible. Que si, au contraire, en ce nouveau point d'application, on diminuait Q de manière que la partie de la courbe voisine de F redevînt tangente à l'extrados, il faudrait que cette nouvelle courbe coupât la première, KFEI, quelque part entre F et K. D'après les propriétés connues, comme ici le point F est au-dessous de K, cette intersection aura lieu en un point unique, ou, suivant la

figure particulière de la portion de courbe KF, en un nombre impair de points situés sur la même horizontale ; de sorte que, dans tous les cas, la nouvelle courbe sera à droite de la courbe KFEI dans la portion de cette courbe comprise entre F et le point d'intersection qui en est le plus rapproché. Mais comme au-dessous de ce dernier point la nouvelle courbe ne peut rencontrer l'ancienne, elle restera constamment à droite de celle-ci. Donc aux environs du point E elle devra couper l'intrados : elle n'est donc pas possible. Il ne peut donc exister, dans les conditions admises, une courbe des pressions rencontrant la clef en un point plus élevé que K.

Qu'on fasse au contraire descendre le point d'application de Q au-dessous de K, sans changer la grandeur de cette force : la nouvelle courbe sera tout entière au-dessous de KFEI, donc elle coupera l'intrados au-dessus du point E ; elle est donc impossible. Si l'on voulait maintenant diminuer Q, la nouvelle courbe s'abaisserait davantage encore aux environs du point E et serait encore impossible. Mais si l'on augmente la force Q en ce nouveau point d'application inférieur à K, la courbe des pressions pourra s'élever de telle sorte qu'elle demeure vers le point E, et à plus forte raison ailleurs, dans l'intérieur de la voûte : cette courbe sera donc possible.

On conçoit d'ailleurs que, sous certaines conditions, le point K descende assez dans le joint à la clef pour que la valeur accrue de Q, strictement nécessaire pour obtenir une courbe demeurant dans l'intérieur de la voûte, soit supérieure au maximum de Q, auquel cas les courbes des pressions correspondantes sortiraient en quelque point de l'extrados et seraient ainsi impossibles.

De ce qui précède il résulte que la courbe KFEI répond à un minimum de Q, puisque par le point K de la clef il ne peut passer que cette seule courbe, que par un point supérieur à K il n'en peut passer aucune, et que par un point inférieur il ne peut passer que des courbes répondant à des valeurs de Q plus grandes.

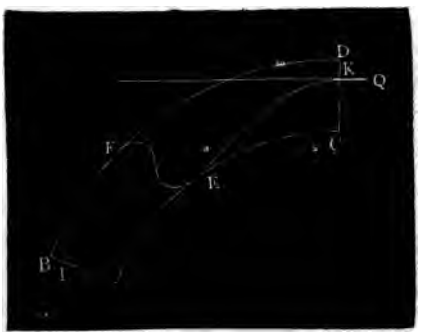
Il arrivera fréquemment que le point F coïncide avec le point au sommet de la courbe et vienne ainsi en D, ou que E coïncide avec l'extrémité inférieure A. Dans ce cas la rencontre avec l'extrados ou avec l'intrados n'est pas nécessairement un contact. Mais les démonstrations précédentes subsistent.

Considérons maintenant l'autre position relative de E et de F : le point E est toujours inférieur à F (fig. 30), mais le précède dans le

parcours de la courbe du sommet à la culée. On prouvera d'abord, comme précédemment, que cette courbe est la seule possible par le point K.

Supposons ensuite une courbe répondant à un point d'application plus élevé : si la valeur de Q est égale ou supérieure à la précédente, la courbe coupera l'extrados au-dessus du point F : elle est donc impossible. Si la valeur de Q est moindre, de manière que la courbe rentre dans l'épaisseur de la voûte aux environs de F, cette courbe devra nécessairement couper KEFI quelque part entre E et F, d'où il résulte qu'elle coupera nécessairement l'extrados vers F ou l'intrados vers E : ceci se voit aisément en vertu des principes antérieurs, si l'on essaye de placer n'importe où, entre F et E, ce dernier point d'intersection. Si on le place au-dessus de E, en *a*, la courbe coupe l'intrados ; si on le place au-dessous, en *b*, la courbe coupe l'extrados.

Fig. 30.



Que l'on prenne maintenant une courbe partant d'un point inférieur à K : si Q a la même valeur ou une valeur moindre, elle coupera l'intrados vers E et sera ainsi impossible. Si Q a une valeur plus grande, pourvu que le point d'application au sommet ne soit pas pris trop bas, il sera possible de faire entrer la nouvelle courbe tout entière dans l'épaisseur de la voûte.

Donc une courbe telle que KEFI ne peut correspondre qu'à un minimum de Q ; car pour le point de départ K cette courbe est seule possible ; pour un point supérieur aucune courbe n'est possible ; pour un point inférieur toute courbe possible répond à une valeur plus grande de Q.

Si le point E est en même temps point de départ, c'est-à-dire coïncide avec C, ou si le point F est point d'arrivée, c'est-à-dire tombe en B, la condition de contact de la courbe avec les courbes-contours disparaît, mais la nature de cette ligne et les démonstrations précédentes ne sont point altérées.

Il est clair que, de ces deux sortes de courbes correspondant au

minimum de Q, une seule peut se présenter dans une voûte donnée. Car admettons l'existence simultanée de deux courbes au minimum de Q : elles ne pourraient, d'après ce qui précède, avoir même point de départ K, puisqu'à ce point répondrait une courbe unique donnant le minimum ; elles ne pourraient non plus partir de deux points différents, car de l'existence de celle qui a le point de départ le plus bas on conclurait, comme ci-dessus, l'impossibilité de toute courbe à point de départ supérieur.

Donc si l'une des deux courbes est possible, l'autre ne peut l'être ; on n'a à vérifier la possibilité de cette dernière, que si la première est impossible.

La courbe des pressions au minimum de Q, dont nous avons parlé en dernier lieu, celle pour laquelle le point E de contact intérieur se rencontre avant le point F de contact extérieur en allant du sommet à la culée, n'est possible que dans des cas très-rares ; nous indiquerons plus tard les cas où la considération de cette courbe peut être nécessaire dans l'application.

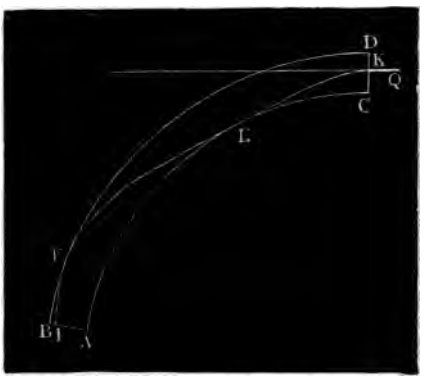
Nous concluons de ce qui précède que, si l'on donne la courbe des pressions répondant au minimum de Q, les points de départ de toutes les autres courbes possibles seront plus bas que celui K de cette courbe ; quant à la question de savoir si le point extrême d'une courbe possible sur le joint de culée sera d'un côté ou de l'autre par rapport au point extrême I de la courbe KEFI, la solution de cette question dépend de la figure de la courbe KEFI entre E et I, de la position du point d'application de la nouvelle courbe, ainsi que de la valeur de Q correspondante.

On peut cependant déduire des principes posés que, si le point d'arrivée I est plus bas que le point de contact intérieur E, ce qui est le cas ordinaire, le point extrême de la nouvelle courbe des pressions sera au-dessus de I, et que si le point I est plus haut que le point E, on peut amener, en abaissant très-peu le point d'application au sommet et augmentant très-peu la force Q, le point extrême au-dessous de I ; toutefois on peut toujours dans ce dernier cas, en abaissant beaucoup le point de départ ou augmentant beaucoup la force Q, maintenir le point d'arrivée au-dessus du point I.

§ 14. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au maximum de la poussée.

Quand le point de contact F avec l'extrados est plus bas que le point de contact E avec l'intrados, la courbe des pressions correspondante se rapporte à un maximum de la poussée. Mais cette propriété a lieu seulement lorsque le point E précède F en allant du sommet à la culée, car dans le cas contraire la courbe des pressions dont il s'agit devrait couper en trois points certains joints de la voûte, ce qui est impossible. D'après cela, il n'y a pas lieu ici de distinguer deux genres de courbes pouvant satisfaire à la condition du maximum de Q, comme il était nécessaire de le faire en ce qui concerne le minimum.

Fig. 31.



Soit donc KEFI (fig. 31) une courbe des pressions jouissant de la propriété énoncée. Par le point K il n'y a aucune autre courbe possible, parce que, avec une valeur plus grande de Q, elle couperait l'extrados au-dessus de F, et avec une valeur moindre elle couperait l'intrados au-dessus de E. Si l'on descend de K vers C le point d'application d'une nouvelle courbe, celle-ci, en supposant une valeur de Q égale ou inférieure à la première, coupera l'intrados vers E; si Q était plus grand que le premier, et assez augmenté pour que la nouvelle courbe rentrât dans la voûte vers E, elle couperait la ligne KEFI entre K et E, ce qui l'obligerait à couper l'extrados au-dessus de F. Ainsi aucune autre courbe n'est possible pour un point de départ plus bas que K.

Élevons maintenant le point d'application vers D. Si Q était aussi grand ou plus grand, la nouvelle courbe des pressions résultante couperait l'extrados au-dessus de F et serait impossible. Mais si l'on prend Q plus petit, en diminuant suffisamment cette force, on pourra maintenir la nouvelle courbe tout entière dans l'épaisseur de la voûte, pourvu qu'on n'ait pas choisi le point d'application trop

haut, auquel cas la courbe irait couper nécessairement l'intrados.

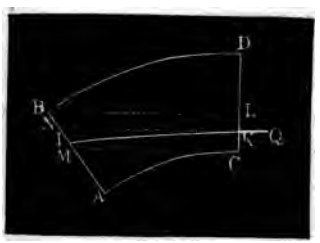
De là il résulte que la courbe en question correspond à un maximum de la poussée, puisque par le point K il ne passe que cette seule courbe, par un point plus bas aucune, par un point plus haut aucune courbe correspondant à une valeur égale ou supérieure de Q.

Comme le point de contact F doit toujours être plus haut que le point d'arrivée I de la même courbe sur la culée, on voit sans peine que le point d'arrivée de toute courbe possible sera en deçà de I, sur IA.

Si le point E venait à coïncider avec le point de départ, ce qui l'amènerait en C, ou le point F avec le point d'arrivée, et par conséquent avec le point B, la condition de contact disparaîtrait, mais le caractère de la courbe et les démonstrations précédentes ne changeraient pas.

A propos de la détermination du maximum de Q, il y a encore à considérer le cas particulier où le point le plus bas de la clef est plus bas que le point le plus haut du joint de culée : alors tous les points de l'intrados sont plus bas que tous les points de l'extrados, en sorte qu'entre les horizontales BL et MC (fig. 32), il y en a d'autres en nombre infini qui demeurent dans l'épaisseur de la voûte entre les joints extrêmes. Cette forme de l'arc n'a aucune influence sur le minimum de Q, mais il ne peut plus être question d'un maximum, car aucun point F de l'extrados ne peut être au-dessous d'un point E quelconque de l'intrados. En donnant un point K entre L et C, on pourra toujours prendre Q assez grand pour que la courbe KI demeure dans la voûte : pour Q infini, la courbe devient la ligne droite KN. Il résulte de là que le maximum cherché est infini, et que la courbe correspondante est l'une quelconque des horizontales entre LB et CM.

Fig. 32.



Une autre conséquence est celle-ci : une voûte de cette nature admet toujours une courbe possible répondant à un minimum de Q ; elle sera donc toujours en équilibre en tant que l'équilibre dépend de la rotation des voussoirs, en réservant la considération du glissement.

§ 15. Limites des courbes des pressions possibles. Limite de stabilité de la voûte. Cas où l'équilibre est impossible.

Si l'on a tracé suivant les règles ci-dessus les courbes des pressions qui répondent respectivement au maximum et au minimum de la poussée Q, on voit que les points de départ de ces deux courbes au joint du sommet donnent les limites entre lesquelles se trouvent renfermés les points de départ de toutes les courbes possibles, et que le point d'arrivée de la courbe répondant au maximum est la limite extrême que ne peut dépasser le point d'arrivée d'une courbe possible quelconque sur le joint de culée. Dans cette proposition générale sur la position du point d'arrivée, il faut exclure le cas particulier considéré plus haut, où le point C est plus bas que le point B du joint de culée, et où par suite le maximum de Q est infini, et son point d'application indéterminé.

Fig. 33.

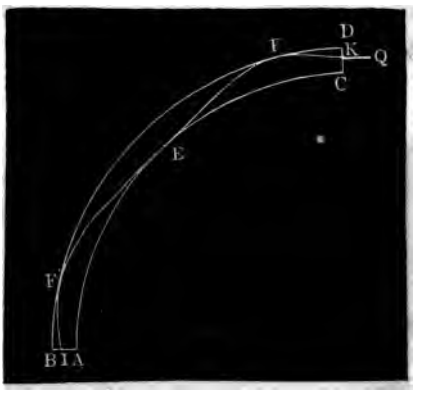
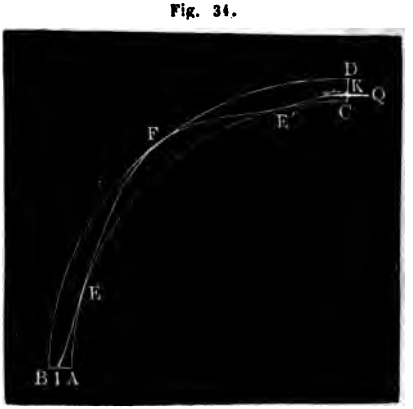


Fig. 34.



Si dans une voûte on pouvait construire une courbe qui eût en même temps les propriétés du minimum et du maximum, celle-là serait la seule courbe possible, et la voûte serait à l'état d'*équilibre limite*.

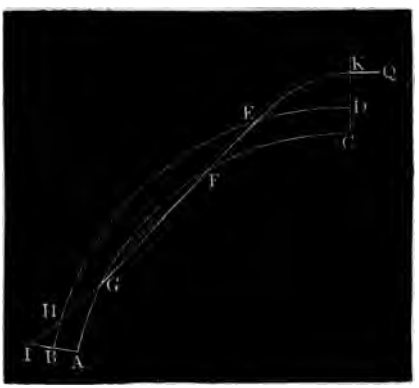
Telle est, par exemple, la courbe KFEF'I (fig. 33) qui touche l'extrados en F, F', et l'intrados en E, E étant plus haut que F', mais plus bas que F. Le point F peut coïncider avec D, F' avec B ; dans ces cas, il n'y a pas contact en ces points avec l'extrados. Le point E pourrait aussi être avant F sur la courbe, en allant de K vers I : alors il pourrait coïncider

avec C, pourvu qu'il fût toujours plus bas que F, plus haut que F′.

La courbe en question peut avoir aussi la forme KE′FEI, toucher l'intrados en E, E′, l'extrados en F (fig. 34), ce point étant au-dessus de E et au-dessous de E′. Le point E peut coïncider avec A, E′ avec C, au quel cas il n'y a plus contact nécessaire en ces points. Le point F pourrait aussi suivre le point E dans la courbe KI, et alors coïncider avec B, pourvu qu'il demeurât toujours au-dessus de E, au-dessous de E′.

On déduit enfin de ce qui précède cette proposition : Si une courbe des pressions, telle que KEFGHI (fig. 35), peut être tracée, laquelle traverse deux fois, n'importe comment, l'épaisseur de la voûte et en sorte dans une de ses parties, l'équilibre de cette voûte est impossible, pourvu que tous les points d'une traversée de l'épaisseur de la voûte soient plus hauts que tous les points de l'autre traversée. En effet, une courbe des pressions quelconque pouvant assurer l'équilibre ne devrait sortir nulle part de la voûte ; cela l'obligerait à couper à la fois les segments HG et EF, ce qui n'est pas possible. Ainsi il n'existe aucune courbe qui demeure tout entière dans l'épaisseur de la voûte : donc la voûte ne pourra pas se tenir en équilibre.

Fig. 35.

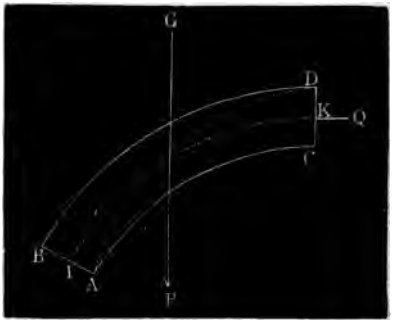


§ 16. Détermination, suivant la forme particulière de la voûte, de la vraie courbe des pressions, laquelle répond au minimum de la poussée. Procédé pour vérifier s'il y aura stabilité ou rupture. Joints de rupture.

Après cette étude générale des courbes des pressions, nous chercherons à montrer successivement quel est l'état de stabilité des arcs des formes habituelles ; pour cela nous chercherons la position de la courbe des pressions qui, répondant au minimum de la poussée horizontale, est ainsi la véritable.

Soit, pour la demi-voûte ABCD (fig. 36), P le poids du massif de la voûte avec sa surcharge, GP la verticale passant par le centre de gravité du poids P.

Fig. 36.



Nous admettrons, dans ce paragraphe, que la verticale GP passe à droite du point inférieur A du joint de culée ou de l'intrados. Soient KI une courbe des pressions quelconque, Q la force horizontale qui, appliquée en K au joint supérieur, donnerait naissance à la courbe KI. Soient p la distance horizontale de la verticale GP au point I, et h la hauteur verticale du point K au-dessus du point I. On a alors :

$$hQ = pP;$$

et, en considérant comme connue la position des points K et I, et, par conséquent, h et p,

$$Q = \frac{pP}{h}.$$

Q sera d'autant plus petit que p sera moindre, ou que h sera plus grand : on aura donc obtenu la moindre valeur possible de la poussée en faisant passer la courbe par les deux points D et A.

De là découle immédiatement le procédé suivant pour apprécier la stabilité d'une voûte.

On construira une courbe des pressions DA, passant par le point le plus haut du joint au sommet et par le point le plus bas du joint de culée. Il pourra alors se présenter cinq cas.

Premier cas. — La courbe DA se trouve tout entière, du point D au point A, entre les courbes-contours DB, CA.

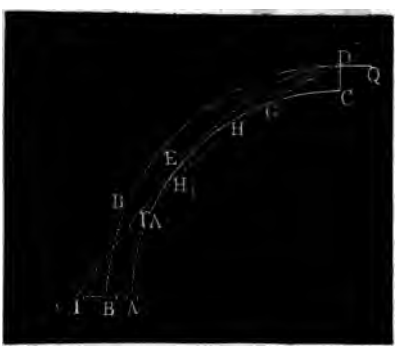
Dans ce cas, cette courbe des pressions est la vraie. L'équilibre de l'arc est assuré ; les voussoirs se pressent en D et A, et la poussée horizontale Q se développe au sommet de la voûte avec la valeur qui a été employée au tracé de la courbe DA ; cette même valeur donne aussi la composante horizontale de la réaction agissant en A.

Ce cas se présente principalement quand la courbe est limitée par des arcs surbaissés et horizontaux à la clef.

Si l'extrados DB n'était pas horizontal en D, mais incliné vers le bas, alors, même pour l'arc le plus surbaissé, la courbe des pressions sortirait de l'extrados dans le voisinage du sommet, parce que la courbe des pressions est toujours horizontale au sommet (toutes les fois qu'il n'y a pas au sommet un poids isolé fini). Il faut cependant remarquer, à cet égard, que nous avons regardé l'arc comme formé de voussoirs infiniment petits. En réalité ce n'est qu'une approximation, et comme la courbe des pressions est effectivement une ligne brisée qui s'incline depuis le point D jusqu'à son intersection avec le joint voisin de chaque côté, il arrivera quelquefois que pour un arc très-aplati la courbe des pressions pourra passer par le point le plus haut D, quand même l'extrados ne serait pas tout à fait horizontal.

Nous n'insisterons plus au reste dans la suite sur les petites modifications qui résultent de la grandeur finie des voussoirs : elles sont toujours faciles à reconnaître.

Fig. 37



Deuxième cas. — La courbe des pressions DA coupe l'intrados en un ou plusieurs points (soit comme DGA, soit comme DHH$_1$A), mais elle ne coupe pas l'extrados (fig. 37).

Alors la vraie courbe des pressions cherchée est celle qui passe par le sommet D de l'extrados, et qui touche l'intrados CA, pourvu que cette courbe reste partout ailleurs au dedans de la voûte.

Soit DEI cette ligne, obtenue soit analytiquement ou par un tracé approximatif, soit E son point de contact avec l'intrados. Des propriétés exposées ci-dessus de la courbe des pressions il résulte que si la courbe dont il s'agit est possible, c'est-à-dire si elle ne sort nulle part de la voûte, il n'y en a pas d'autre qui réponde à une moindre valeur de la poussée.

Dans l'équilibre ainsi établi, les voussoirs se serrent à l'extrados en D, à l'intrados en E, par leurs arêtes extrêmes. C'est ce qui fait qu'en réalité on remarque en ces endroits des épaufrures.

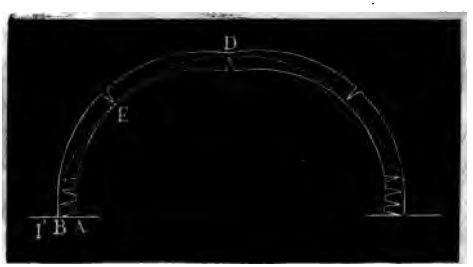
Ce genre d'équilibre se présente particulièrement dans les arcs

dont l'intrados est presque vertical en A, et dont l'extrados est horizontal en D.

S'il se rencontrait que la courbe DEI menée par le point D et touchant l'intrados en E coupât l'extrados au-dessus du point E, entre D et E, l'état d'équilibre de la voûte devrait être étudié comme dans le quatrième cas ci-dessous.

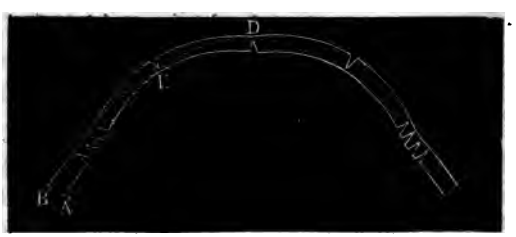
Mais si cette courbe DEI coupe l'extrados au-dessous du point E, c'est-à-dire entre E et I (comme par exemple si la voûte s'étendait jusqu'en A'B' et que DEI' fût la courbe en question), l'équilibre serait impossible, comme on l'a vu plus haut. Nous admettons ici implicitement que la deuxième courbe minimum résultant des considérations antérieures n'est pas possible. Mais quand la courbe qu'on rencontre, DEI', est de telle forme que de D en I' chaque point est plus bas que le précédent, il n'y a pas lieu de s'inquiéter de la deuxième courbe minimum, car celle-ci devrait couper la première en deux points de hauteurs inégales. Nous ne nous occuperons par la suite que de cette première forme, ordinaire dans les applications, à moins que le contraire ne soit spécifié.

Fig. 38.



Dans les circonstances déterminées ci-dessus, la voûte se rompt par un abaissement du sommet et l'écartement des reins. Il se produit une rotation autour des arêtes D, E, et de toutes les arêtes voisines de B, pour lesquelles la courbe des pressions DEI' est en dehors de l'extrados (fig. 38). Si la courbe DEI', qui coupe l'extrados au-dessus de B', rentrait plus bas dans la voûte, aux approches du joint de culée, la partie inférieure des reins ne bougerait pas lors de la rupture de la voûte (fig. 39).

Fig. 39

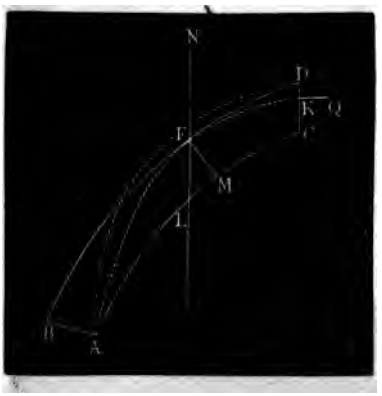


Le joint qui passe par le point E se nomme joint de rupture. La position de ce joint est évidemment indépendante, dans certaines

limites, de la forme et de la charge de la partie inférieure de la voûte EA'B'. C'est pourquoi on laisse à ce joint, correspondant au point de contact de la vraie courbe des pressions avec l'intrados, le nom de joint de rupture, même quand la voûte est parfaitement en équilibre.

On voit que la limite de la stabilité est atteinte dès que la courbe des pressions DEI passe par le point extérieur B du joint de culée, et que la voûte sera d'autant plus stable que le point I d'intersection de la courbe avec le joint de culée AB sera plus près du point A.

Fig. 40.



Troisième cas. — La courbe des pressions DA coupe l'extrados en un ou plusieurs points, mais non l'intrados (fig. 40).

La vraie courbe des pressions cherchée est alors celle qui passe par le point inférieur A de l'intrados au joint de culée, et qui touche l'extrados au-dessous du point D, pourvu que cette courbe reste dans l'intérieur de la voûte partout ailleurs.

On déterminera cette courbe analytiquement ou bien par un tracé approximatif : soit AFK cette courbe, F son point de contact avec l'extrados.

Du moment où cette courbe est possible, c'est-à-dire ne sort en aucun point de la voûte, on sait par les principes antérieurs qu'il n'y en a pas d'autre qui puisse répondre à une valeur moindre de Q. Ce genre d'équilibre, par lequel l'action mutuelle des voussoirs s'exerce à l'extrados en F, à l'intrados en A, se présente surtout pour des arcs dont l'intrados au point le plus bas n'est pas vertical, et où l'extrados n'est pas horizontal à la clef.

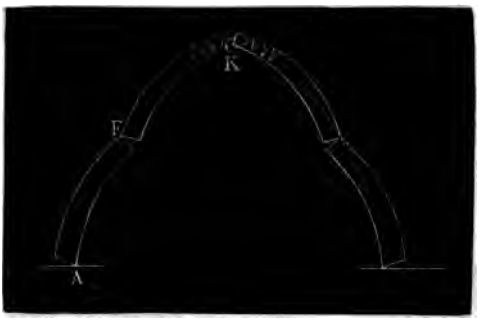
Si cette courbe AFK coupe l'intrados au-dessous du point F, on est ramené au quatrième cas ci-après. Si elle coupe l'intrados au-dessus du point F, l'équilibre est impossible. La voûte se rompt par une chute des parties basses en dedans, et par un soulèvement des parties supérieures. Les rotations ont lieu autour des arêtes A et F, et autour de toutes les arêtes intermédiaires dans le voisinage de la clef, là où la courbe des pressions sort de l'intrados (fig. 41).

Le joint qui passe par le point F se nomme joint de rupture, aussi

bien dans le cas de l'arc stable que dans le cas de l'arc instable.

La stabilité de l'arc atteint évidemment sa limite quand la courbe des pressions AFK passe par le point C le plus bas de la clef, et elle est d'autant plus grande que le point K d'intersection de la courbe avec la clef est plus près du point D.

Fig. 41.

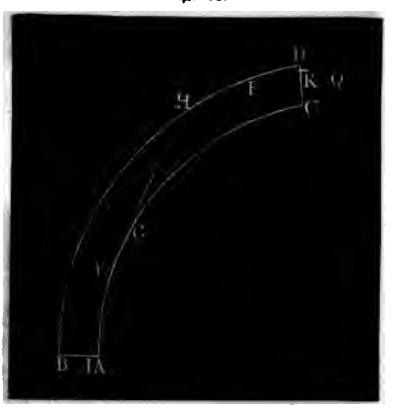


Quatrième cas. — La courbe des pressions DA coupe l'intrados et l'extrados, chacun en un ou plusieurs points, sans cependant aller plus d'une fois d'une courbe-contour à l'autre (ou sans traverser plus d'une fois l'épaisseur entière de la voûte).

La vraie courbe des pressions est alors celle qui touche à la fois l'intrados et l'extrados, le premier dans le bas, le second dans le haut.

Soit KFEI (fig. 42) la courbe ainsi tracée, soient E, F les points de contact. Cet équilibre, pour lequel les voussoirs réagissent mutuellement en E, F par leur arêtes, se présente surtout pour des arcs dont l'intrados est vertical en A, et l'extrados incliné à la clef. Il se présente encore dans les cas définis antérieurement, nos 2 et 3 : il est le cas général d'équilibre d'une voûte, dont les cas nos 1, 2, 3 sont des cas particuliers.

Fig. 42.

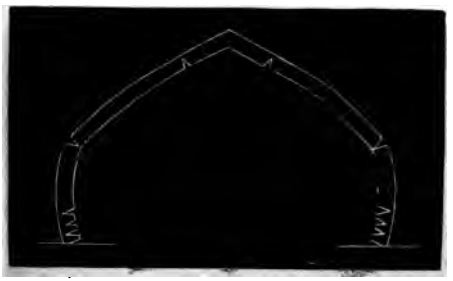


Si la courbe KFEI coupe l'intrados entre K et F, ou l'extrados entre E et I, ou les deux à la fois, l'équilibre de la voûte est impossible. La voûte se rompt alors d'une manière facile à comprendre dans les trois cas représentés par les figures nos 43, 44, 45.

Il se produit dans le mouvement de rupture des rotations autour des arêtes F, E, comme autour de toutes celles qui sont voisines de B et C, pour lesquelles la courbe passe au dehors de la voûte. La

demi-voûte se partage en trois segments : l'inférieur est poussé en dehors ou demeure fixe, le moyen tombe en dedans, la clef suit les deux mouvements dont il s'agit et s'enfonce ou s'élève en conséquence.

Fig. 43.



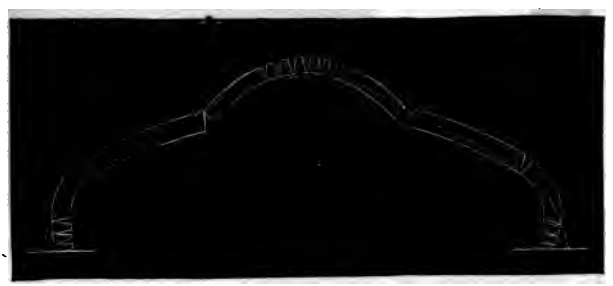
Dans ce cas général il y a deux joints de rupture, d'après le sens du mot : les joints E, F. Les théories antérieurement publiées avaient laissé échapper ce cas.

La voûte atteint la limite de stabilité quand la courbe des pressions KFEI passe en B ou en C, ou à la fois en ces deux points. D'après cela l'arc est d'autant plus stable que les points I, K de la courbe des pressions sont respectivement plus rapprochés de A, D.

Fig. 44.

Cinquième cas. — La courbe des pressions DA coupe l'intrados et l'extrados en un nombre quelconque de points, de manière qu'elle traverse l'épaisseur entière de la voûte plus d'une fois (ce nombre de traversées étant nécessairement impair).

Fig. 45

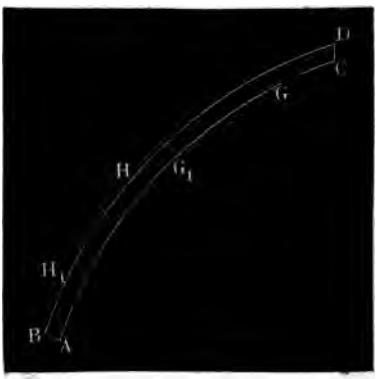


Dans ce cas l'équilibre de la voûte est impossible, ainsi qu'il est facile de le reconnaître d'après les propriétés de la courbe des pressions. La voûte devra donc se briser en se partageant en plusieurs parties, dont les points de rotation, pour la courbe DGG_1HH_1A, (fig. 46), par exemple, sont dans le voisinage de D, puis

entre G et G_1, puis entre H et H_1, enfin dans le voisinage de A.

Pour tracer la vraie courbe des pressions dans les différents cas considérés ci-dessus, suivant la position particulière de la courbe des pressions DA, on a, d'après ce que nous avons vu, à construire une courbe des pressions qui passse par deux points donnés, ou qui passe par un point et qui touche une courbe donnée, ou enfin qui touche deux courbes données.

Fig. 46



La mise en œuvre analytique de ces conditions conduit à des calculs pénibles, et exige dans les deux derniers cas la résolution d'équations transcendantes. On devra donc dans la pratique se dispenser d'employer les méthodes analytiques rigoureuses, et se contenter dans tous les cas d'approximations graphiques : les applications ne comportent d'ailleurs nullement des déterminations d'une précision mathématique.

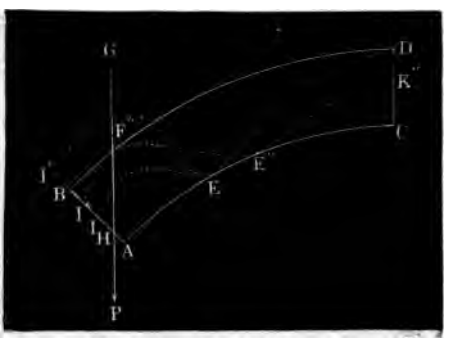
Nous donnerons dans le paragraphe 24 une méthode très-simple et commode pour atteindre ce but. Contentons-nous d'ajouter ici que les deux derniers des trois problèmes énoncés ci-dessus peuvent toujours dans la pratique se ramener au premier, c'est-à-dire à la construction d'une courbe des pressions passant par deux points donnés. Car, si la courbe DA coupe l'intrados vers le bas ou l'extrados vers le haut, la forme de cette courbe permet de reconnaître à très-peu près le point où doit se faire le contact avec l'intrados ou l'extrados. Par ce point et par le premier ci-dessus indiqué, on fait passer la courbe cherchée. Si elle ne satisfait pas exactement aux conditions exigées, elle s'écartera cependant très-peu de la courbe cherchée, et elle indiquera encore plus exactement que celle-ci la position du point de contact. Si donc cela est nécessaire, par ces points plus exacts on construira une nouvelle courbe des pressions qui, pratiquement, pourra être considérée comme la vraie. Cependant on se convaincra que cette construction est superflue dans la plupart des applications, et que la courbe construite en premier lieu répond avec une exactitude suffisante aux conditions imposées.

§ 17. Cas particulier d'un arc supportant une surcharge exceptionnelle appliquée immédiatement sur le joint de culée.

En étudiant les cinq cas précédents on a admis que la verticale qui passe par le centre de gravité de la demi-voûte et de sa surcharge passe à droite du point le plus bas du joint de la culée. Il peut arriver cependant, quoique rarement, que la verticale GP passe à gauche du point A et coupe le joint de culée AB, par exemple en H, par suite d'une très-forte surcharge dans le voisinage de la culée (fig. 47).

Si alors on voulait construire une courbe des pressions passant par D et par A, la force horizontale nécessaire pour cela serait évidemment négative et ne produirait pas d'effort pour pousser les voussoirs à la clef, mais au contraire pour les écarter les uns des autres, ce qui est absurde. La moindre valeur qu'il ne soit pas contradictoire d'admettre pour Q est zéro. Mais si l'on fait $Q = o$, on obtient cette courbe des pressions dont il a été déjà souvent question, et qui est le lieu des intersections des poids croissants des voussoirs à partir de la clef avec les joints correspondants : cette courbe devra, dans le cas actuel, passer nécessairement en H : ainsi elle est au moins en partie dans l'intérieur de la voûte. Si elle s'y trouve tout entière, l'arc sera en équilibre sans qu'il se développe aucune poussée. Mais s'il n'en est pas ainsi et que la courbe sorte de la voûte entre A et C, ce ne peut être la vraie courbe des pressions, et il y a nécessairement une poussée horizontale positive. Pour trouver cette poussée et la courbe correspondante, toujours soumise à la condition du minimum de Q, supposons d'abord que le point B, et par suite aussi le point H, soit plus bas que C. On voit alors immédiatement que l'extrémité de la courbe

Fig. 47.



cherchée ne sera jamais entre H et A, parce qu'il en résulterait nécessairement une valeur négative de Q : l'extrémité de la courbe sera toujours entre H et B. Pour que Q soit un minimum, le point de départ dans le joint CD devra être aussi haut que possible. Il faudra donc essayer d'abord le point D.

Les limites extrêmes des points de départ et d'arrivée de la courbe des pressions cherchée sont, respectivement, D et H. Comme la courbe qui passe par ces points, et qui correspond à $Q = o$, ne coupe que l'intrados, le cas actuel se ramène au n° 2 du paragraphe précédent, en substituant le point H au point A le plus bas du joint de culée. En conservant le point de départ D et augmentant progressivement Q, ce qui élève la courbe des pressions, on trouve pour caractère de la vraie courbe, comme au cas n° 2, que cette courbe doit passer par le point D et toucher l'intrados, comme DEI.

Si cette dernière courbe demeure tout entière dans l'épaisseur de la voûte, c'est la vraie courbe cherchée : E est le joint de rupture. Si elle coupe l'extrados entre D et E, la vraie courbe sera celle qui touche en haut l'extrados au-dessous de D, et en bas l'intrados, pourvu que cette nouvelle courbe ne sorte pas de la voûte.

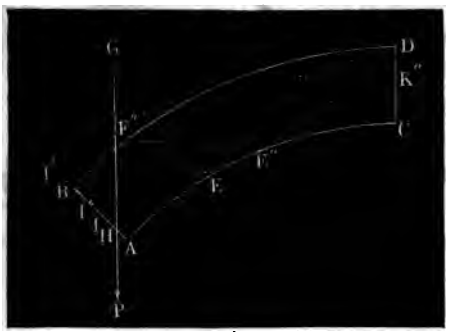
Si la courbe DEI coupe l'extrados entre E et I, comme, par exemple, DEI′, l'équilibre est nécessairement impossible, si en même temps tous les points consécutifs de la courbe, à partir du point D, vont en descendant, et alors la voûte se rompra comme le fait la voûte instable du deuxième cas.

Mais dès que la courbe DEI′ a un point à tangente horizontale entre D et I′, aux deux côtés duquel la courbe se relève, on ne peut plus conclure à l'impossibilité de l'équilibre. Il faudra alors s'adresser à la seconde classe des courbes des pressions pouvant répondre au minimum de Q : cette classe de courbes touchera, dans le voisinage de la clef, d'abord l'intrados en E″, puis l'extrados en F″ (ce dernier contact pouvant être remplacé par une rencontre en B); mais le point F″ (ou B) sera plus haut que E″. Si cette dernière courbe est possible, elle est la vraie courbe des pressions, à laquelle appartiennent deux points de rupture E″, F″. Mais si cette courbe elle-même est impossible, toutes les courbes passant par un point plus bas que D et touchant l'intrados couperont comme elle les reins au-dessus de B : ainsi l'arc ne peut être en équilibre, il se rompra comme l'indique la courbe DEI′.

Dans ce que nous venons de dire sur l'équilibre d'une demi-voûte

pour laquelle la verticale GP passant par le centre de gravité rencontre le joint de culée, nous avons supposé que le point le plus haut B de ce joint est plus bas que le point inférieur du joint à la clef. Si, au contraire, B est plus haut que C, on voit de suite qu'une courbe des pressions DEI passant par D et touchant l'intrados (elle coupera toujours d'ailleurs le joint de culée à gauche de H) répond au minimum de Q et qu'elle est la véritable, si elle est possible, c'est-à-dire si elle ne sort de la voûte en aucun point.

Fig. 48.



Si cette courbe coupe l'extrados entre les points D et E, il faudra rechercher si une courbe des pressions qui toucherait en haut l'extrados au-dessous de D et en bas l'intrados est possible, auquel cas ce serait la courbe cherchée. Mais si cette courbe coupe l'intrados entre E et I, comme le fait par exemple DEI', alors la seconde classe des courbes des pressions répondant à un minimum de Q donnera à coup sûr une courbe possible, ayant un point commun avec l'intrados près du sommet, et un autre point commun, plus élevé, avec l'extrados. Cela résulte d'un théorème général établi plus haut, d'après lequel une demi-voûte dans laquelle B est plus haut que C est toujours en équilibre. D'après cela il y aura nécessairement dans la voûte dont il s'agit une courbe des pressions possible correspondant à un minimum de Q. On voit aussi que, B étant plus haut que C, une courbe de la première classe considérée, comme DEI', aura toujours, si elle coupe l'extrados, un point à tangente horizontale aux deux côtés duquel la courbe se relève; de sorte qu'à côté de cette courbe impossible il peut très-bien en exister une autre de la seconde classe, telle que KE''F''I'', coupant la première en un nombre pair de points à la même hauteur.

Si, non-seulement le point B, mais aussi le point H est plus haut que C, il est possible, comme on le voit sans peine, que les points extrêmes I de certaines courbes des pressions qu'on peut construire tombent à droite de H, ou entre H et A, mais non pas plus bas que le point où l'horizontale passant par C coupe le joint de culée AB.

On voit qu'une voûte horizontale ou verticale, dans laquelle cette condition : B au-dessus de C, serait remplie, ne pourrait jamais, sous une surcharge quelconque, se rompre par rotation des voussoirs autour de leurs arêtes, pourvu qu'elle fût appuyée contre des culées suffisamment résistantes.

§ 18. Influence de la compressibilité des voussoirs sur les courbes des pressions.

Quand on veut appliquer les considérations précédentes sur l'équilibre des voûtes à des cas pratiques, il faut tenir compte d'une propriété qu'on a laissée de côté ci-dessus : c'est que la matière ne saurait, par sa nature, être incompressible : d'où il suit que la courbe des pressions ne peut jamais passer effectivement par une arête de voussoir, et ainsi ne peut rencontrer le contour de la voûte ; aux points où la théorie précédente indique un contact avec l'une des courbes-contours, la courbe des pressions en demeurera réellement à une distance finie, qui dépend du degré de compressibilité de la matière.

Il n'en est pas moins vrai que la pression la plus forte aura lieu dans le voisinage des arêtes, et qu'on émet une hypothèse inadmissible quand on considère une courbe vraie des pressions comme pouvant passer par les milieux des joints. Dans une voûte à voussoirs incompressibles, de forme quelconque, la courbe des pressions ne peut jamais passer au milieu de l'épaisseur ; dans une voûte à voussoirs compressibles les mêmes propriétés subsistent à l'état d'approximation.

Ainsi la pression mutuelle des voussoirs ne pourra jamais se répartir uniformément sur la surface de chaque joint, car cela supposerait que la courbe des pressions passe par les milieux de tous les joints. Quand on détermine l'épaisseur d'une voûte, comme on le fait souvent, par cette condition que la pression sur chaque joint, supposée répartie uniformément sur la surface du joint, ne donne pas un résultat excessif par unité de surface, on se pose une condition trompeuse. C'est ce qui explique pourquoi dans beaucoup de voûtes les voussoirs éclatent en certains points, bien que la pression sur le joint correspondant, considérée comme uniformément répartie, soit bien inférieure à celle que la même matière peut porter

avec pleine sécurité dans d'autres circonstances où la répartition est uniforme, comme il arrive dans les murs élevés.

Si l'on projette un arc d'après cette condition qu'une courbe des pressions passant par les milieux des joints soit possible, une telle voûte possédera en réalité une stabilité très-grande, plus grande que celle que l'on obtiendrait si cette même courbe pouvait être la vraie courbe des pressions. On conçoit en effet que la vraie courbe des pressions, qui s'approche, suivant les lois expliquées ci-dessus, de l'intrados ou de l'extrados aux points de rupture, se tient à une plus grande distance des arêtes dont la rencontre déterminerait la rupture, que ne le fait la courbe des milieux des joints [1].

Nous avons dit que la courbe des pressions dans une voûte formée de matériaux compressibles recule dans l'intérieur de la voûte, là où elle aurait rencontré les courbes-contours dans le cas de voussoirs incompressibles. Ce déplacement entraîne le changement des extrémités supérieure et inférieure de la courbe des pressions ; la poussée change aussi et devient supérieure au minimum théorique que nous avons appris à découvrir.

On remarquera au reste, aux ponts existants, que pour les très-bons matériaux, comme le granit, le calcaire et le grès durs, la courbe des pressions atteint souvent à très-peu près l'arête du joint de rupture ; ainsi il n'y a pas lieu d'introduire dans la pratique cette hypothèse que plusieurs auteurs, et Navier en particulier, ont proposée : d'après laquelle la pression sur un point croîtrait uniformément d'une arête à l'autre, en sorte que la résultante devrait être distante de l'arête la plus rapprochée d'un tiers de la longueur du

[1] Pour que la rupture d'une voûte stable ait lieu, il faut que, par des circonstances qui introduisent des forces nouvelles, la courbe vraie des pressions passe, de la position primitive au minimum de poussée, à la position au maximum. Or, dans ce mouvement, elle rencontrera la position intermédiaire qui répond à la courbe des milieux des joints. C'est en ce sens que l'on dit que la courbe vraie des pressions (celle au minimum de poussée) dans une voûte stable est plus éloignée de la courbe au maximum de poussée que ne l'est la courbe moyenne. Si donc cette dernière est une courbe possible, à plus forte raison seront possibles une infinité de courbes répondant à une poussée moindre ; et ainsi la voûte est plus stable qu'elle ne le serait si la courbe du milieu des joints était la vraie courbe des pressions.

Cette courbe du milieu des joints ne pourrait être la vraie courbe des pressions que dans l'hypothèse d'une voûte infiniment mince.

joint, et que la [illegible] supporterait sur cette arête une charge double de celle qu'amène [illegible] une répartition uniforme [1].

Dans ces circonstances, on comprend qu'il puisse être souvent utile de connaître le maximum de Q.

§ 19. Détermination de la courbe des pressions qui répond au maximum de la poussée.

Le maximum de la poussée Q répond, ainsi qu'on l'a vu précédemment, à une courbe des pressions possible mais non effectivement existante, qui a un point commun avec l'intrados et un autre plus bas avec l'extrados.

Fig. 49.

On peut déterminer cette courbe pour les diverses formes et surcharges d'une [illegible] voûte en suivant la marche suivante, analogue à celle employée ci-dessus pour trouver la courbe des pressions répondant à un minimum de Q.

Le bras de levier de la poussée Q au sommet, par rapport à un point quelconque du joint de culée, est un minimum si cette force agit au point inférieur C du joint au sommet (fig. 49); le bras de levier du poids de la demi-voûte ABDC, surcharge comprise, sera un maximum si l'on choisit le point fixe au point supérieur B du joint de

[1] Cette hypothèse a pu convenir par sa simplicité aux premiers essais de calcul des voûtes ; mais il est bien évident qu'elle ne peut être exacte. D'abord le mode de répartition d'une pression sur un joint ne peut être indépendant de la nature du corps pressé ; puis il n'est pas douteux, d'après l'expérience de tous les jours, qu'une pression se répartit sur un joint, de part et d'autre du point d'application, suivant une courbe indéfinie ayant pour asymptote la ligne du joint, si le joint a une longueur indéfinie lui-même ; et dans le cas du joint fini, suivant une courbe de forme analogue à la précédente. Ces courbes sont probablement exponentielles. Leur détermination serait une belle conquête de la physique moléculaire : elle n'a pu être encore abordée ni par le calcul, ni par l'expérience, à notre connaissance du moins. Elle est pourtant la base nécessaire d'une théorie complète des voûtes. — En attendant, on est obligé de se contenter des indications fournies par le cas abstrait des voussoirs incompressibles, comme on le fait dans cet ouvrage, en les complétant par l'examen des voûtes stables existantes.

culée : de là il résulte qu'une courbe des pressions passant par les points C et B, si elle est d'ailleurs possible, c'est-à-dire si elle se trouve tout entière dans l'épaisseur de la voûte, répondra au maximum de Q.

On a déjà remarqué que la verticale du centre de gravité général de la demi-voûte et de sa surcharge ne peut passer qu'à droite du point B ; il est indifférent, pour ce qui nous occupe, que cette verticale passe à droite du point A ou à gauche entre A et B, tandis que dans la recherche du minimum une discussion était nécessaire à cet égard. Mais on doit se rappeler ici que pour un arc très-aplati le point C pourrait être plus bas que B, et qu'alors des horizontales pourraient être tracées de la clef au joint de culée, d'où il résulte que le maximum de Q serait infiniment grand, et répondrait à un point d'application indéterminé entre les niveaux B et C.

Excluons ce cas : C est donc plus haut que B. Nous construirons d'abord une courbe des pressions passant par ces deux points. Il se présentera cinq cas, que nous énumérerons rapidement, attendu que la démonstration des particularités qui s'y présentent est facile à déduire des propriétés générales des courbes des pressions.

Premier cas. — La courbe CB est tout entière comprise entre l'intrados et l'extrados : c'est alors à cette courbe que répond le maximum de la poussée.

Deuxième cas. — La courbe CB coupe l'intrados, mais ne coupe pas l'extrados. Alors le maximum répond à une courbe passant par le point extrême B de la culée et qui touche l'intrados au-dessous du point C : pourvu que cette courbe soit comprise tout entière dans l'intérieur de la voûte. Si cette dernière courbe coupe l'extrados au-dessous du point de contact avec l'intrados, on cherchera le maximum comme au quatrième cas ci-après. Si l'intersection de la courbe avec l'extrados a lieu au-dessus du point de contact avec l'intrados, l'équilibre de la voûte est impossible : un arc en équilibre ne présentera jamais cette disposition.

Fig. 50.

Troisième cas. — La courbe CB coupe l'extrados, et ne coupe pas l'intrados. Alors le maximum de la poussée répond à une courbe des pressions qui passe par le point inférieur C de la clef et qui

touche l'extrados DB, pourvu que cette courbe demeure partout ailleurs dans l'épaisseur de la voûte.

Si cette dernière courbe coupait l'intrados au-dessus du point de contact avec l'extrados, on chercherait le maximum, comme au quatrième cas ci-après. Si elle coupait l'intrados au-dessous du point de contact avec l'extrados, l'équilibre serait impossible : cette disposition ne se rencontrera pas pour les voûtes en équilibre.

Quatrième cas. — La courbe CB coupe l'intrados et l'extrados, sans cependant traverser plus d'une fois l'épaisseur entière de la voûte.

Dans ce cas, comme dans les dispositions particulières des deuxième et troisième cas qui se ramènent à celui-ci, le maximum de Q appartient à une courbe qui touche l'intrados en haut, l'extrados en bas.

Si cette dernière courbe coupait l'extrados au-dessus de son point de contact avec l'intrados, ou l'intrados au-dessous de son point de contact avec l'extrados, l'équilibre serait impossible ; une voûte en équilibre ne présentera donc jamais cette disposition.

Cinquième cas. — La courbe CB coupe l'intrados et l'extrados de manière à traverser l'épaisseur entière de la voûte plus d'une fois (trois fois au moins, par conséquent, puisque ce nombre doit être impair).

Ce cas ne peut se présenter pour un arc susceptible d'équilibre : là où on le rencontre, la voûte se rompra certainement.

Remarquons que cette classification des cas qui peuvent se présenter dans la recherche du maximum de Q ne correspond pas nécessairement aux cas que nous avons distingués pour la recherche du minimum ; chaque cas du minimum peut même s'allier à chacun des cas du maximum.

De la compressibilité qui appartient à tous les corps de la nature il résulte que la poussée véritable sera toujours plus grande que le minimum déterminé plus haut ; mais il en résulte aussi que le maximum que nous venons de définir ne sera jamais atteint en réalité. La véritable valeur de la poussée Q sera comprise ainsi entre le minimum et le maximum, et pourrait être déterminée avec la courbe des pressions correspondante, si l'élasticité de la voûte était bien connue.

§ 20. Courbe des pressions dont la possibilité assurerait la stabilité de la voûte, quel que fût le degré de compressibilité des voussoirs.

La compressibilité ou élasticité des matériaux n'est pas connue en général; les actions qui résulteraient même d'une compressibilité connue ne pourraient être que très-péniblement déterminées dans un système complexe formé de voussoirs : il y a donc lieu de se demander s'il n'existe pas une courbe des pressions telle que, si elle est possible, la rupture de la voûte par rotation ne soit pas à craindre, quelque grande ou petite que soit la compressibilité des matériaux employés.

Cette question, importante pour l'établissement pratique des voûtes, peut être résolue de la manière suivante : Par suite de la compressibilité des matériaux, la courbe des pressions correspondant au minimum de Q n'a nulle part un point commun avec les trados ou l'extrados; là où, d'après les recherches précédentes, l'intersection devrait avoir lieu, la courbe s'éloigne plus ou moins du contour de la voûte; mais elle n'en demeure pas moins aussi rapprochée que le permet la compressibilité des matériaux. Il suit de là que, même pour les matériaux les plus faibles, la courbe des pressions en ces points ne dépassera pas le milieu du joint [1].

Qu'on trace donc la courbe passant par les milieux des joints, et que l'on marque sur cette courbe les points d'intersection des joints auxquels correspondent, d'après les recherches antérieures, les points de rencontre ou de contact de la courbe au minimum de Q avec les courbes-contours; qu'on fasse passer par les points ainsi déterminés sur la courbe moyenne une courbe des pressions rencontrant ou touchant la courbe moyenne en ces points [2] : si cette

[1] Cas limite ou la matière des voussoirs n'aurait pas de cohésion du tout, en sorte que la transmission des pressions se fît comme dans les fluides; exemples : sable, poussière, etc.

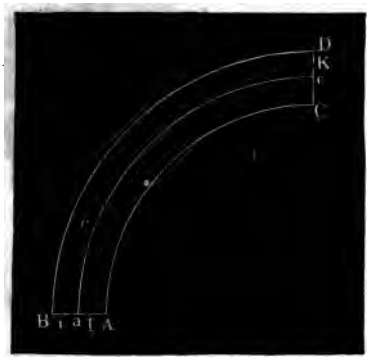
[2] Une courbe des pressions est déterminée par deux points; on ne peut donc pas ajouter à cette double condition celle du contact avec une courbe donnée. Mais ici la courbe donnée étant la courbe moyenne, il est clair que l'on pourra obtenir contact approximatif, et contact rigoureux si l'on fait varier un peu le point de rencontre.

courbe demeure en tout son cours dans l'épaisseur de la voûte, on voit facilement par les propriétés générales de la courbe des pressions que l'équilibre de la voûte est assuré sans conditions, puisque la vraie courbe des pressions prendra toujours une forme donnant à l'arc une stabilité plus grande que ne l'eût fait la courbe que nous venons de tracer en dernier lieu.

Remarquons que si l'on se proposait de construire une courbe des pressions rencontrant la courbe moyenne en un point déterminé, et la touchant ensuite en un point indéterminé, ce point de contact pourrait se trouver au delà de l'extrémité de la courbe moyenne, et alors le deuxième point commun à choisir entre la courbe des pressions cherchée et la courbe moyenne ne serait pas un point de contact, mais un point de rencontre au joint extrême.

Soit, par exemple, en nous plaçant dans le deuxième cas du minimum de Q, *cea* la courbe moyenne (fig. 51) ; on aura à construire une courbe des pressions *cei* passant par le point le plus haut *c* de la première courbe, la touchant extérieurement en *e* et restant tout entière dans l'intérieur de la voûte. La vraie courbe des pressions KI, qui se rapproche, plus que *cei*, d'une part du point D au sommet, et de l'autre du point A à la culée, enfin de l'intrados au point de rupture *e*, donnera nécessairement à l'arc une plus grande stabilité. S'il était impossible qu'une courbe des pressions passant par *c* touchât la courbe moyenne en un point inférieur quelconque, mais si une courbe des pressions, passant par *c* et *a*, demeurait tout entière dans l'intérieur de la voûte, dans ce cas on reconnaîtrait encore facilement que la vraie courbe des pressions ne peut donner qu'une stabilité plus grande encore.

Fig 51.



On pourra, si l'on est maître de la forme de la voûte, la choisir telle que la courbe moyenne *cea* soit dans toute son étendue une courbe des pressions.

§ 21. Procédé pratique pour l'établissement d'une voûte stable.

On établira une voûte de stabilité certaine, quel que soit le degré d'élasticité des matériaux, en s'y prenant de la manière suivante :

On trace d'abord, avec l'ouverture et la hauteur sous clef données d'avance, un profil de voûte analogue à la forme générale des voûtes ordinaires, avec une épaisseur à la clef donnée aussi par analogie. Cela fait, on cherche pour cette voûte la vraie courbe des pressions dans l'hypothèse de l'incompressibilité des voussoirs. Cette ligne, qu'on détermine par les méthodes connues, rencontre en plusieurs points les courbes-contours. On cherche alors si, par suite de la compressibilité des matériaux, la courbe des pressions vraie ne peut que se rapprocher de la courbe moyenne, ou si elle a en certaines parties tendance à se rapprocher des arêtes.

Dans le premier cas, la voûte est parfaitement stable. C'est ce qui arrive lorsque la courbe des pressions ci-dessus décrite passe (fig. 36) par le point le plus haut D au sommet et le point le plus bas A à la culée. Cela se produira généralement pour les arcs de cercle aplatis.

Dans l'autre cas on devra présumer que pour des matériaux assez faibles la courbe des pressions s'approcherait assez des arêtes aux points indiqués pour que la stabilité fût compromise. Il pourrait même se faire que l'arête fût dépassée et l'équilibre de l'arc tout à fait détruit. Cela arrivera par exemple si la première courbe des pressions tracée DEI (fig. 37) touche l'extrados en D, l'intrados en E : alors en réalité la courbe des pressions tend à s'approcher de l'arête extérieure B aux environs du point I.

On atteint dans ce cas la plus grande sécurité qu'on puisse obtenir, en rendant possible une courbe des pressions passant par le milieu du joint à la fois à la clef CD, au joint de rupture E et à la culée AB.

Si cela n'a pas lieu déjà, on y arrive en conservant l'intrados et l'épaisseur à la clef et augmentant l'épaisseur à la culée, ou en conservant les épaisseurs extrêmes et changeant la forme de l'arc par un abaissement vers E, ou en conservant la forme et donnant une épaisseur uniforme qu'on augmente jusqu'au degré nécessaire, ou enfin en combinant ces diverses modifications.

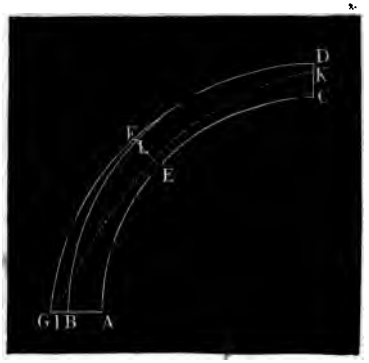
On obtient par ce procédé une voûte qui possède un degré de stabilité exagéré pour beaucoup de cas pratiques. Ce procédé conduit souvent d'ailleurs à des épaisseurs considérables ou à un aplatissement vers le joint de rupture plus prononcé qu'il ne convient.

En fait, la condition de faire passer une courbe des pressions possible par les milieux des trois joints indiqués ne paraît pas répondre à une nécessité pratique : on n'emploie jamais en effet pour voussoirs des matériaux assez compressibles pour ramener vers le milieu d'un joint la courbe qui, théoriquement, passe par l'arête de ce joint. On reconnaît même, à l'inspection de plusieurs voûtes existantes, qu'aux points faibles les voussoirs se pressent sur l'une des courbes-contours par leurs arêtes, les joints s'ouvrant sensiblement de l'autre côté : ce qui prouve que pour la plupart des pierres de construction la courbe des pressions peut ne s'écarter que très-peu de l'arête de la pierre.

D'après cela, on pourra se contenter dans l'application, comme garantie suffisante, de permettre à la courbe des pressions un recul jusqu'au quart du joint à partir de l'arête ; on enlèvera deux zones, intérieure et extérieure, ayant chacune un quart de l'épaisseur à chaque joint, et on appliquera à la partie restante les règles données dans le cas de matériaux incompressibles, en s'assurant que l'équilibre a lieu sous les charges données.

Si la voûte donnée ne réalisait pas ces conditions, on la modifierait aisément par les altérations indiquées plus haut, et pour cela on opérerait comme il suit :

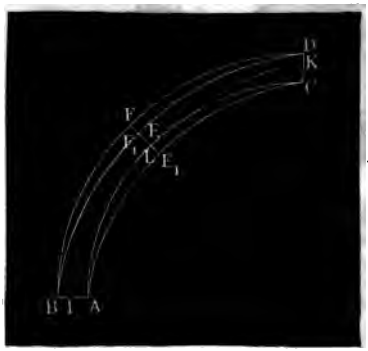
Fig. 52.



Admettons que la vraie courbe des pressions pour le cas de matériaux incompressibles, et par suite le point de rupture EF (fig. 52), soient connus. On veut assurer la stabilité compromise de l'arc ABCD par exemple, en augmentant simplement l'épaisseur de l'arc dans la partie inférieure. On construit la courbe des pressions KLI qui passe par les deux points K du sommet et L du joint de rupture, tels que $DK = \frac{1}{4}DC$ et $EL = \frac{1}{4}EF$. On fait ensuite $IG = \frac{1}{3}IA$, en sorte que

GI $= \frac{1}{4}$GA. L'arc AGDC présentera une stabilité suffisante pour la pratique. On peut du reste recommencer l'opération pour ce nouvel arc et corriger l'extrados en conséquence, mais cette nouvelle opération n'apportera ordinairement qu'une modification insignifiante.

Fig. 53.



Si l'on veut conserver les épaisseurs et changer la forme ou la courbure de l'arc, on prendra dans la voûte les deux points K et I respectivement placés à la clef et à la culée (fig. 53), et tels que DK $= \frac{1}{4}$ DC, BI $= \frac{1}{4}$BA, et on construira la courbe des pressions KLI passant par K, I. On prend ensuite $LE_1 = \frac{1}{4}EF$, $LF_1 = \frac{3}{4}EF$. Alors on a l'arc ABF_1DCE_1A, qu'on peut au besoin corriger en répétant l'opération, et qui possède la stabilité demandée.

Fig. 54.

Si enfin dans un arc d'épaisseur uniforme on veut augmenter progressivement l'épaisseur sans changer la forme de l'arc, on construira dans la voûte primitive ABFDCEA (fig. 54), la courbe des pressions passant par les points K et I ci-dessus définis. Cette courbe sera tout entière dans l'épaisseur de l'arc, comme KLI, ou bien elle sortira comme KLM dans le voisinage du joint de rupture. Soit maintenant :

a l'épaisseur : AB $=$ CD $= a$;

et b la distance EL (ou EM).

On aura un arc de la stabilité requise en augmentant l'épaisseur d'une quantité $BB_1 = DD_1 = \frac{1}{2}a - 2b$ (dans le cas KLI) ou de $\frac{1}{2}a + 2b$ (dans le cas KMI). Cette modification, à laquelle on peut donner plus d'exactitude en répétant la construction, est fondée sur

cette considération que si l'on augmente uniformément la voûte et qu'on trace une courbe des pressions passant aux points situés au quart des joints respectifs de clef et de culée, on a une nouvelle courbe sensiblement parallèle à l'ancienne KLI (ou KMI)[1].

Quand l'équilibre de l'arc que l'on considère ne se rattachera pas au premier ou au deuxième, mais au troisième ou au quatrième cas du paragraphe 16, ce qui du reste arrivera rarement dans la pratique et presque jamais pour des ponts, on verra facilement, en prenant pour guide ce qui précède, ce que l'on doit faire pour assurer la stabilité.

Dans un grand nombre de cas d'application, la forme de l'intrados d'un pont est déterminée à l'avance par des considérations architectoniques, ou par des considérations d'écoulement des eaux. Il arrive cependant que cette forme soit tout à fait indifférente, on fera bien de faire en sorte qu'une courbe des pressions passant par les milieux des joints soit possible, attendu qu'on aura ainsi une voûte de stabilité aussi grande et aussi uniforme que possible et une répartition des pressions sur les joints aussi uniforme que possible également. La courbe cherchée s'obtiendra par une, ou au plus deux approximations successives, en partant d'une courbe arbitrairement choisie, présumée jouir de la propriété cherchée. Une telle courbe rencontrera la culée obliquement, et non verticalement ; elle ressemble beaucoup à une parabole dont le sommet serait à la clef.

En exécution on pourra tracer cette courbe approximativement, comme on fait pour les anses de panier elliptiques, au moyen de plusieurs arcs de cercles.

[1] Soient, en admettant ce parallélisme, x l'augmentation d'épaisseur de la voûte, y la distance de l'ancienne à la nouvelle courbe des pressions. On doit avoir, aux joints de clef et de culée,

$$\left(\tfrac{1}{4}a - y + x\right) = \tfrac{1}{4}(a + x)$$

et au joint de rupture

$$b + y = \tfrac{1}{4}(a + x),$$

d'où

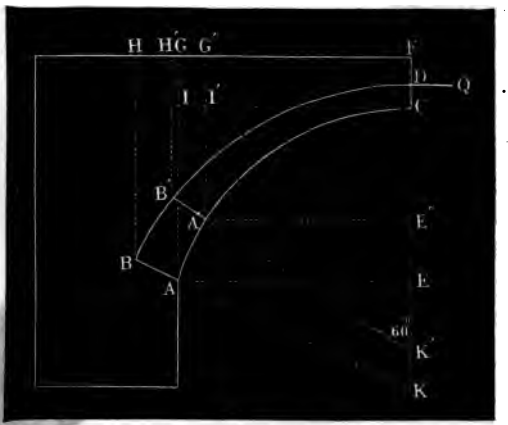
$$x = \tfrac{1}{2}a - 2b \text{(cas KLI). Pour KMI, même calcul.}$$

§ 22. Détermination de l'épaisseur des voûtes au point de vue de la résistance des matériaux.

Une voûte satisfaisant aux conditions précédentes, et établie sur des culées invariables, ne peut se rompre par rotation des voussoirs autour de certaines arêtes ; mais nous n'avons pas exclu jusqu'à présent la possibilité d'une rupture par *écrasement* des voussoirs sous une pression trop forte, ou par glissement des voussoirs sur les faces de certains joints.

Pour se garantir du danger d'écrasement sous une trop grande pression, il faut donner en tous les points de l'arc une certaine épaisseur aux voussoirs, un certain écartement aux courbes-contours de la voûte : comme la pression n'est pas également répartie sur toute l'étendue du joint, et qu'on manque de connaissances sur la compressibilité des voussoirs, l'écartement dont il s'agit ne se détermine que par la mesure des voûtes analogues, antérieurement construites et reconnues durables.

Fig. 55.



La détermination de l'épaisseur des voûtes au point de vue de la résistance des matériaux peut être abrégée, pour les formes de pont habituelles, par des formules qui résultent des considérations suivantes :

Dans une voûte ABDC, chargée d'une matière de même densité limitée à l'horizontale FH, soient (fig. 55) :

a la demi-ouverture AE ;

b la flèche EC ;

c l'épaisseur à la clef CD ;

d l'épaisseur à la culée AB ;

h la hauteur DF de la masse homogène formant charge au-dessus de la clef. (Si la matière de la charge n'a pas effectivement le même

poids spécifique que les voussoirs, on supposera la ligne FH plus haute ou plus basse suivant les cas, et on continuera avec l'hypothèse d'un poids spécifique égal) ;

β l'angle BKF du joint de culée avec la verticale ;

$\delta = d \sin \beta$ la projection horizontale GH du joint de culée AB ;

Q la poussée horizontale au sommet ;

$\frac{Q}{c}$ la poussée moyenne par unité superficielle du joint à la clef ;

P le poids de la voûte avec sa surcharge, ACFHB ;

M le moment de P par rapport au point A ;

R la réaction de la culée sur AB ;

S la pression normale contre le joint de culée ;

$\frac{S}{d}$ la pression normale moyenne sur chaque unité superficielle du joint de culée.

On peut représenter les forces P, Q, R, S par des surfaces, en les considérant comme les poids de prismes de la matière des voussoirs, ayant une hauteur égale à 1 dans le sens perpendiculaire à la figure ABFHC. Les forces moyennes $\frac{Q}{c}$, $\frac{S}{d}$ seront alors représentées par des longueurs.

Pour établir la formule approchée que nous avons en vue, nous indiquerons deux cas :

Premier cas. — L'angle β est $<$ ou $= 60°$. Nous admettons que la vraie courbe des pressions passe par le point supérieur D de la clef et le point inférieur A du joint de culée, de sorte que la force horizontale Q agissant en D doit être en équilibre autour du point A avec la force verticale P agissant au centre de gravité de l'aire ABHFC.

Assimilons en outre AIC à un segment parabolique, en sorte que sa surface égale $\frac{ab}{3}$, et la distance de son centre de gravité au point A égale $\frac{a}{4}$. Enfin considérons le trapèze ABHG comme un rectangle de hauteur AG et de largeur $HG = \delta$. On a ainsi, en prenant le point A pour centre de rotation :

Surfaces.	Bras de levier.	Moments.
$ACI = \frac{ab}{3}$,	$\frac{a}{4}$	$\frac{a^2 b}{12}$.
$ICFG = a(c+h)$,	$\frac{a}{2}$,	$\frac{a^2(c+h)}{2}$.
$AGHB = \delta(b+c+h)$,	$-\frac{\delta}{2}$,	$-\frac{\delta^2}{2}(b+c+h)$

d'où

$$P = \frac{ab}{3} + a(c+h) + \delta(b+c+h) \qquad (1)$$

$$M = \frac{a^2 b}{12} + \frac{a^2(c+h)}{2} - \frac{\delta^2}{2}(b+c+h) \qquad (2)$$

$$Q = \frac{M}{b+c} \qquad (3)$$

$$S = P \sin\beta + Q \cos\beta \qquad (4)$$

Deuxième cas.— L'angle β est $> 60°$. Nous admettrons que le joint de rupture soit incliné à 60° sur la verticale, que la courbe des pressions passe ainsi par le point inférieur A′ du joint A′B′, incliné sur la verticale à 60°, en sorte que la force Q agissant en D sera en équilibre avec le poids A′B′H′FC autour du point A′.

Soient, pour le point A′,

a' la distance horizontale A′E′;

b' la distance verticale E′C;

d' l'épaisseur de la voûte A′B′ au joint de rupture, qu'on peut prendre égale à $d' = c + \frac{b'}{b}(d - c)$, par approximation;

$\delta' = 0{,}80.d'$ la projection horizontale G′H′ du joint A′B′;

P′ le poids A′B′H′FC;

M le moment de P′ par rapport à A′.

On a, comme précédemment :

$$P' = \frac{a'b'}{3} + a'(c+h) + 0{,}80 \,.\, d'(b'+c+h). \qquad (5)$$

$$M' = \frac{a'^2 b'}{12} + \frac{a'^2(c+h)}{2} - 0{,}32.d'^2(b'+c+h). \qquad (6)$$

$$Q = \frac{M'}{b'+c} \qquad (7)$$

Le poids P conserve sa valeur (1), et on a encore ici pour la pression normale contre la culée : $S = P \sin\beta + Q \cos\beta$. . . . . (8).

C'est ces pressions moyennes $\frac{Q}{c}$, $\frac{S}{d}$, qu'il s'agit de déterminer par les valeurs qu'elles possèdent dans les voûtes de pont existantes. Nous avons calculé dans ce but Q, S, $\frac{Q}{c}$, $\frac{S}{d}$ pour une série d'ouvrages connus ; là où la surcharge consistait seulement dans la chaussée ordinaire, nous avons pris $h = 2$ pieds; quand l'augmentation d'épaisseur de l'arc, de la clef à la culée, était inconnue, nous l'avons supposée nulle ($d = c$).

La table suivante renferme les éléments de ces calculs, et donne en outre d'autres résultats dont nous ferons ultérieurement usage [1].

[1] La table originale est dressée en prenant le pied pour unité. Mais le pied

Pour rendre plus apparentes les lois cherchées, on a classé les ponts dans l'ordre ascendant des valeurs de la poussée déterminée, suivant les cas, par la formule (3) ou (7). La résistance des matériaux employés n'est pas la même pour les divers ponts ; mais, faute de renseignements suffisants sur cette résistance, on a été obligé de ne pas tenir compte de cette différence ; ce qui n'a pas en pratique de grand inconvénient, parce qu'on prend toujours pour les voûtes des matériaux de choix : elles sont généralement construites en calcaire dur ou en grès dur, plus rarement en granit ou autres roches plutoniques. Les deux premières espèces de pierres ont à peu près la même résistance ; d'ailleurs on n'expose dans la pratique les voussoirs qu'à une faible partie de la résistance qu'on a obtenue des échantillons expérimentés. En se fiant à la table ci-après pour les dimensions d'un pont nouveau, on n'aura pas à craindre de dépasser la limite de stabilité, à moins qu'on n'ait des matériaux d'une faiblesse exceptionnelle.

Il est entendu d'ailleurs que nous supposons des voussoirs quadrilatères formés d'une seule pièce sur toute l'épaisseur de la voûte, et non de pièces superposées comme les briques [1].

Ces remarques générales faites, notons que dans le pont n° 28, construit à Schwelm, sur le chemin de fer de Berg et Mark, un grand nombre de voussoirs, dans toutes les parties de la voûte, sont

adopté est, suivant le lieu de construction des ouvrages, le pied de Paris ($0^m,325$), ou le pied du Rhin ($0^m,314$). L'auteur remarque avec raison que cette variation n'a aucune importance pour le but qu'on se propose ici. Nous avons, bien entendu, traduit cette table et les autres tables de l'ouvrage en mesures métriques. Afin de conserver identiquement les valeurs du texte allemand, nous avons à la colonne (12) donné à h la valeur $0^m,63$ ou $0^m,65$, suivant qu'elle représentait 2 pieds du Rhin ou 2 pieds français.

Par cela même que notre table est une traduction pure et simple de celle de l'auteur, il est possible qu'il y ait des erreurs de quelques centimètres sur les données de quelques ponts. Cela n'a aucun inconvénient sérieux.

M est exprimé en mètres cubes (col. 26).

P', P, Q, S, W en mètres carrés (col. 19, 20, 21, 22, 31).

$a, b, c, d, h, f, g, e, a', b', \left(\frac{Q}{c}\right), \left(\frac{S}{d}\right)$, en mètres (col. 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 23, 24).

β, α, γ, en degrés sexagésimaux et minutes (col. 16, 29, 30).

$\frac{2a}{b}, \left(\frac{Sc}{Qd}\right), n, \left(\frac{P}{Q}\right), \left(\frac{Q}{W}\right), m$, sont des nombres abstraits, (col. 9, 25, 27, 28, 32, 33).

[1] Voir, plus loin, des observations sur les *rouleaux* de briques.

écrasés, mais que les matériaux n'étaient pas de bonne nature. Le pont n° 37, à Vieille-Brioude, sur l'Allier, est tombé par écrasement des voussoirs, peu solides vers la clef.

Le pont (n°s 33 et 40) de Neuilly est un pont très-solide, fait de bons matériaux; cependant il s'est produit dans les voussoirs supérieurs des têtes plusieurs ruptures. Le pont n° 35 sur le Taff est tombé sous une surcharge aux reins, mais sans écrasement.

De la table ci-contre on déduit les conclusions suivantes :

1° La poussée horizontale par mètre carré à la clef $\left(\frac{Q}{c}\right)$ est très-loin d'avoir une valeur sensiblement constante pour les divers ponts. Elle augmente avec la grandeur des ponts et même avec la valeur absolue de la poussée Q.

2° Cette variation de $\frac{Q}{c}$ est si considérable, que cette pression répond, pour les très-petits ponts, au poids d'une colonne ayant la densité des voussoirs et haute de 3 mètres environ; et pour les très-grands ponts, elle peut équivaloir au poids d'une colonne de 70 mètres de haut.

3° Les mêmes remarques s'appliquent à la pression normale sur le joint de culée par mètre carré, $\frac{S}{d}$. Cette pression est presque toujours très-supérieure à $\frac{Q}{c}$, et peut atteindre le triple ou le quadruple de celle-ci, c'est-à-dire le poids d'une colonne de pierre de 250 mètres de haut.

Si l'on observe que les pressions Q et S ne sont jamais uniformément réparties sur les longueurs entières c, d des joints correspondants, que quelques parties de ces joints supportent le double ou le triple de la pression moyenne $\frac{Q}{c}$ ou $\frac{S}{d}$, on reconnaît qu'il est bon de déterminer les dimensions de la voûte, de sorte que le joint au sommet ne supporte jamais une pression supérieure à celle d'une colonne de pierre de 60 à 65 mètres de hauteur, et que le joint de culée ne supporte pas une pression normale supérieure au poids d'une colonne de 90 à 100 mètres de haut. Nous poserons comme limites $\frac{Q}{c} = 63$, $\frac{S}{d} = 94$.

D'après ces bases, on tire de la table ci-contre la table suivante qui peut servir à déterminer les épaisseurs à la clef et à la culée, nécessaires pour un pont dont on connaît les autres dimensions.

Table pour la détermination de l'épaisseur des voûtes.

ÉPAISSEUR à la clef ou d ix naissances.	POUSSÉE Q exprimée en mètres carrés.	PRESSION normale maximum contre la culée : S.	Pression moyenne par mètre carré au sommet : $\left(\frac{Q}{c}\right)$	Pression moyenne par mètre carré à la culée (maximum) $\left(\frac{S}{d}\right)$	RAPPORT de ces pressions $\frac{S}{d} : \frac{Q}{c}$.
0,00	0	0	0	0	3
0,28	1	3	3,5	10,4	3
0,35	2	6	5,7	17,0	3
0,43	3	9	6,9	20,7	3
0,48	4	11,9	8,2	24,5	3
0,51	5	15,0	9,7	29,2	3
0,54	6	18,0	11,0	33,0	3
0,58	7	21,0	11,9	35,8	3
0,61	8	24,0	12,9	38,6	3
0,66	9	27,0	13,5	40,5	3
0,70	10	30,0	14,1	42,4	3
0,78	12	35,9	15,1	45,2	3
0,86	14	41,9	16,0	48,4	3
0,93	16	48,1	17,0	51,2	3
0,98	18	53,9	17,9	54,0	3
1,04	20	60,1	18,8	56,8	3
1,09	22	66,0	20,1	60,0	3
1,13	24	71,8	21,0	62,8	3
1,17	26	77,9	22,0	65,6	3
1,21	28	84,0	22,9	68,8	3
1,24	30	89,8	23,9	71,6	3
1,31	35	105,0	26,4	78,8	3
1,37	40	120,0	28,6	86,0	3
1,42	45	134,8	31,1	93,6	3
1,47	50	140,1	33,6	94,2	2,8
1,50	55	143,7	36,1	94,2	2,6
1,53	60	146,4	38,3	94,2	2,4
1,57	65	149,7	40,8	94,2	2,3
1,59	70	152,1	43,3	94,2	2,17
1,62	75	154,5	45,8	94,2	2,06
1,64	80	156,3	48,0	94,2	1,95
1,65	85	158,1	50,6	94,2	1,86
1,67	90	159,6	53,1	94,2	1,77
1,69	95	161,1	55,6	94,2	1,70
1,70	100	162,6	57,8	94,2	1,62
1,73	110	165,0	62,8	94,2	1,5
1,88	120	180,0	62,8	94,2	1,5
2,04	130	195,0	62,8	94,2	1,5
2,20	140	210,0	62,8	94,2	1,5
2,35	150	225,0	62,8	94,2	1,5

Voici de quelle manière on se servira de cette table : étant données forme de l'intrados et la hauteur de la surcharge, on donne aux

épaisseurs c et d des valeurs qui répondent par aperçu aux dimensions des voûtes existantes. Au moyen des nombres ainsi choisis, on calcule par la formule ci-dessus (3) ou (7) la poussée Q. On prend ensuite comme valeur corrigée de l'épaisseur c à la clef le nombre de la première colonne de la table qui répond à la valeur trouvée de Q.

De même on calcule par la formule (4) ou (8) la pression normale S sur la culée. Si celle-ci est inférieure à celle qui, dans la table précédente, répond à la valeur trouvée pour Q, on donne à la voûte la même épaisseur à la culée qu'au sommet : $d = c$. Mais si la formule (4) ou (8) donne une valeur de S plus grande, on prend pour d la valeur qui, dans la première colonne de la table, répond à la valeur trouvée de S. Dans ce dernier cas, si l'on veut une voûte d'épaisseur constante, on donnera pour épaisseur à la clef le nombre trouvé pour l'épaisseur aux naissances.

Si les valeurs trouvées ainsi pour c et d diffèrent notablement de celles qu'on avait choisies tout d'abord, on les corrigera facilement par une nouvelle application des formules qui donnent Q et S.

Toutefois, dans aucune application aux routes ou aux chemins de fer, on ne doit prendre c ou d inférieur à $0^m,32$. Dans les constructions qui ne sont soumises à aucune secousse, on peut adopter des valeurs moindres, jusqu'au minimum de $0^m,16$.

Premier exemple. — Appliquons les règles qui précèdent au pont de Pont-Sainte-Maxence, dont les dimensions sont données au n° 24 de notre tableau. Si l'on prenait les épaisseurs $c = d = 1^m,46$, les formules donneraient $Q = 45,9$, $S = 57,8$. A cette valeur de Q répond dans la table la valeur $c = 1,429$, qu'on peut prendre aussi pour épaisseur à la culée, puisque la valeur $S = 57,8$ est loin d'atteindre la valeur inscrite comme maximum dans la même table en regard de cette valeur de c. On voit ici que l'épaisseur calculée diffère très-peu de celle adoptée en effet, $1^m,46$.

Deuxième exemple. — Prenons pour la partie moyenne du pont de Neuilly, dont les dimensions figurent au n° 33 du premier tableau, $c = d = 1,62$. Les formules (7) et (8) donnent : $Q = 70,9$, $S = 127,2$. A cette valeur de Q répond, d'après la table précédente, l'épaisseur au sommet $c = 1^m,595$, laquelle peut être adoptée également pour la culée et diffère peu de celle réellement existante, qui est $1^m,62$.

Troisième exemple. — Pour le pont de Schwelm (n° 38 du pre-

mier tableau), prenons $c = d = 0^m,94$. On en tire, par les formules (7) et (8), $Q = 87$, $S = 190$. D'où, au moyen de la seconde table, $c = 1,658$. La valeur de S, 190 dépasse le maximum 158 correspondant à c, et exige une épaisseur de 2 mètres aux naissances.

D'après cela, ce pont, qui a en réalité $0^m,94$, aurait dû avoir $1^m,65$ à la clef, 2 mètres à la culée, ou, si l'on voulait une dimension uniforme, 2 mètres partout.

Dans l'application des formules précédentes et de leurs résultats aux viaducs de chemins de fer, il sera utile, mais aussi suffisant, vu la plus grande charge et les secousses auxquelles le passage des trains soumet ces ouvrages, d'augmenter de $0^m,94$ la hauteur h de la charge permanente. Il est clair qu'une telle augmentation aura proportionnellement plus d'influence sur les dimensions des ponts chargés d'une faible hauteur de remblais que pour celle des ponts établis sous des remblais élevés.

Si, par exemple, le pont de Neuilly, avec sa charge de $0^m,65$, devait porter un chemin de fer, au moyen de $h = 0^m,65 + 0^m,94 = 1^m,59$, on aurait la poussée $Q = 87,2$, qui correspond à une épaisseur $c = d = 1,70$.

Enfin nous rappellerons encore que dans les formules précédentes on suppose l'emploi de voussoirs très-résistants et formés chacun d'une seule pièce [1].

On peut admettre en général que le grès ou le calcaire dur, pe-

[1] En réalité les dimensions indiquées dans ce paragraphe s'appliquent soit à des voûtes en pierre de taille, soit à des voûtes en maçonnerie de moellon. Dans le premier cas on ne tient pas compte de l'adhérence du mortier; dans le second les mêmes considérations ne sont applicables qu'à la condition d'imaginer des voussoirs monolithes fictifs, en d'autres termes de tenir compte de l'adhérence des mortiers dans le sens parallèle aux joints, tout en continuant à la négliger dans le sens perpendiculaire.

On assimile ces voussoirs fictifs à des voussoirs en pierre de taille dont la cohésion serait due à la fois à la cohésion propre des moellons, à celle du mortier employé, et à l'adhérence du mortier sur les moellons. Dans les cas ordinaires, où l'adhérence du mortier a une valeur notable, on peut admettre pour les voûtes en moellon les dimensions calculées d'après les indications de ce paragraphe. Si l'adhérence du mortier était faible, on se comporterait comme si les moellons étaient peu résistants, en augmentant les dimensions, comme il est dit plus bas.

Nous venons de rappeler que l'adhérence du mortier, au moins dans un sens, entre implicitement en considération quand il s'agit de voûtes en maçonnerie de moellon : si l'on n'en tenait pas compte, il n'y aurait pas dans ces voûtes de

sant de 2,100 à 2,300 kilogrammes par mètre cube, possède une résistance de 750 kilogrammes par centimètre carré, et ne serait ainsi écrasé que par le poids d'une colonne de même matière de 4,000 à 5,000 mètres de hauteur. D'après la table précédente, la matière ne travaillerait ainsi dans les grands ponts qu'à $\frac{1}{70}$ ou $\frac{1}{75}$ de sa résistance à la clef, et à la culée à $\frac{1}{45}$ ou $\frac{1}{50}$, si la pression se répartissait uniformément. Mais comme cette dernière condition est loin d'être remplie, il s'ensuit que la résistance mise en jeu aux joints où la courbe des pressions s'approche des limites de la voûte est beaucoup plus forte, soit peut-être $\frac{1}{10}$ de la résistance limite.

Dans le cas des matérieux peu résistants, on devra prendre l'épaisseur plus grande qu'il n'est admis dans la table. Cependant il n'est pas nécessaire de proportionner l'augmentation à la différence de résistance, parce que, lorsqu'on augmente l'étendue du joint, la tendance à l'ouverture de ce joint diminue, en sorte que la répartition sur la surface du joint devient plus uniforme.

Pour fournir un point de comparaison, nous dirons que si l'on emploie les briques, qui sont l'une des plus faibles sortes de matériaux, présentant une résistance de trois à six fois plus faible que celle des pierres dures dont nous avons parlé plus haut, on adopte une épaisseur égale à une fois et demie celle inscrite dans la table.

On construit souvent des voûtes de briques à plusieurs rangs de briques superposées et liées entre elles. Ce genre de construction a cela de vicieux, que, si l'épaisseur à la clef est trop forte, le rouleau intérieur ne supportant aucune pression peut tomber en dedans. Cet accident, qui ne compromet pas beaucoup du reste la stabilité de l'arc, peut être évité par des soins de construction.

Mais on construit quelquefois de semblables voûtes en rouleaux superposés sans liaison entre eux. Ce mode est admissible en certains cas; mais il est souvent très-fautif. La voûte est en équilibre, seu-

joints bien déterminés, et dès lors la poussée pourrait être effectivement plus grande que la poussée calculée.

En effet, étant donnée une voûte monolithe présentant une certaine poussée Q, telle qu'il n'y ait écrasement en aucun point, si l'on vient à supposer cette voûte composée de voussoirs suivant des joints qui suivent une certaine loi, la poussée véritable pourra être Q comme dans le monolithe, si l'appareil est bien fait; mais un appareil mal conçu donnerait lieu à une poussée plus grande, parce que la voûte dans son mouvement ne pourrait s'arrêter à l'état Q.

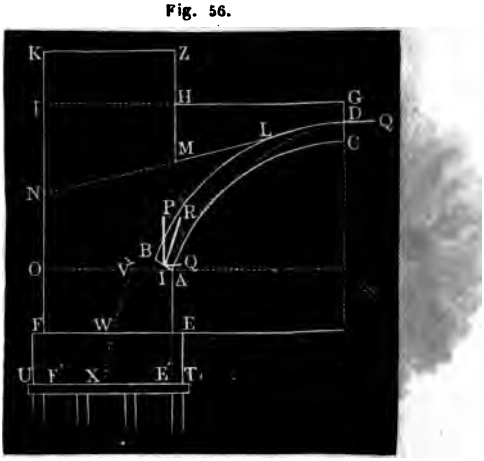
lement lorsque le rouleau extérieur est stable, considéré comme portant séparément $\frac{1}{n}$ de la charge supérieure. Dans ce cas le deuxième, le troisième, ... le n^e rouleau sont dans le même cas et l'ensemble est stable sous la charge entière.

Mais si l'intrados n'est pas stable sous le n^e de la charge, aucun des autres rouleaux ne le sera et l'ensemble ne le sera pas. C'est ainsi par exemple qu'un plein cintre de $6^m,28$ d'ouverture et $0^m,31$ d'épaisseur, non chargé, ne pouvant pas être en équilibre, un arc de cette ouverture, non chargé, aussi épais qu'on le voudra, mais formé de rouleaux concentriques de $0^m,31$ chacun, ne pourra se tenir davantage en équilibre ; si dans la pratique il se rencontre des arcs en équilibre dans ces conditions, cela tient uniquement à l'adhérence du mortier.

§ 23. — Culées et tympans.

Une voûte, telle que CDBA (fig. 56), est ordinairement appuyée de chaque côté contre une culée de forme AEFKZ, reposant sur une fondation EFUT dont on considère la face UT comme absolument fixe. Si le massif de fondation EFUT était lui-même entouré de matière incompressible, on pourrait déjà regarder sa face supérieure EF comme la base absolument fixe de la construction qui s'élève au-dessus. En général, cela n'a pas lieu et c'est UT qui est la base fixe à considérer.

Fig. 56.



Tandis que dans les ponts la surface supérieure de la culée est au-dessous de la charge GH arasée horizontalement, comme par exemple LMN, dans d'autres constructions, au contraire, la culée s'élève beaucoup au-dessus, comme il arrive pour les voûtes des églises gothiques, où la culée s'élève fréquemment en forme de flèche ou de tourelle EFKZ. Lorsque dans les ponts la culée MN est couverte, comme la voûte, d'une surcharge MNIH, cette partie de la charge joue le rôle d'une partie de culée.

Le massif de maçonnerie de forme angulaire, établi entre la voûte et la culée ou entre une arche et l'arche voisine, telle que LBM, porte le nom de tympan : nous n'avons jusqu'ici tenu compte de ce tympan que comme charge ; il a, en outre, une notable importance comme massif de soutien dans le cas de surcharges accidentelles et pour amortir les secousses résultant de chocs qui auraient pour effet de faire accidentellement sortir de l'arc dans sa partie inférieure la courbe des pressions ; il donne souvent la stabilité à des arcs qui seraient trop faibles pour supporter par eux-mêmes la charge supérieure DGHM.

Il sera donc toujours bon de prolonger dans les tympans, ainsi que dans la partie supérieure de la culée, les joints obliques de l'arc, comme si la masse AONDC était une voûte homogène.

On commettrait toutefois une faute grave si l'on croyait pouvoir, pour la charge ordinaire de la voûte, faire passer la courbe réelle des pressions en dehors de l'arc proprement dit, et la diriger dans sa partie inférieure, dans les tympans et les culées. On a, en effet, construit l'arc lui-même en matériaux de choix, pleins, taillés et posés avec un soin particulier ; tout ce soin est sans utilité si l'on s'en rapporte pour la résistance à un massif de maçonnerie à joints concentriques, il est vrai, mais n'offrant pas à beaucoup près au même degré que la voûte elle-même la capacité de résistance contre les forces obliques qui se développent.

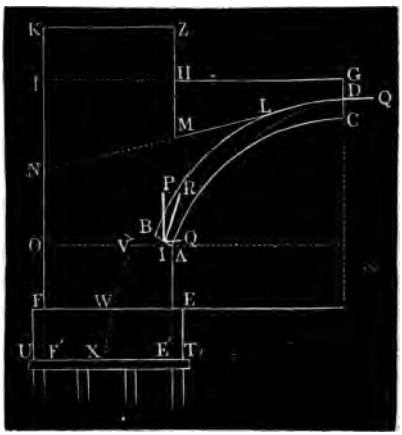
Dans les cas où la voûte est en arc de cercle, le joint de culée AB est incliné : les constructeurs anglais ont souvent alors conservé aux joints la même inclinaison depuis le point A en descendant jusqu'à la base TU, et même incliné cette base elle-même ainsi que les pieux de fondation.

Cependant, dans la généralité des applications, les joints sont horizontaux depuis AO jusqu'en bas. On n'en poursuivra pas moins le tracé de la courbe des pressions d'après les principes antérieurs dans la culée et sa fondation, et on sera fixé ainsi sur la stabilité de ces massifs. La courbe de pressions, VWX, sera brisée au joint AO, à cause du changement brusque de la direction des joints et de la composante verticale de la pression.

Si la fondation présente en EF un empatement brusque, symétrique des deux côtés, la courbe aura un jarret en W et descendra plus roide dans sa partie inférieure. Si, au contraire, l'empatement n'est pas symétrique, la partie WX se séparera de VW.

La courbe s'approche ordinairement des arêtes extérieures F de la culée et U de la fondation : de sorte que les bases de ces massifs en sont les parties les plus exposées, au point de vue de la rotation. Pour apprécier la stabilité de la culée et de sa fondation réunies, il suffira donc de déterminer la position du point extrême X de la courbe. On aura d'abord le point W en composant la pression R au joint de la culée, laquelle passe au point I, avec le poids de la culée AEFKZ passant par le centre de gravité de la culée ; l'intersection de la résultante avec EF est le point W. On l'obtiendrait encore en composant la poussée horizontale Q avec le poids du système CEFKZHG tout entier, appliqué au centre de gravité de cette surface.

Fig. 57.



On aura de même le point X en composant la poussée avec le poids du système entier, fondation comprise, ou, si l'on a déjà le point W, on composera la pression en W avec le poids de la fondation EFUT.

Quand W vient en F ou X en U, la construction est à l'état d'équilibre limite. Dans l'application, on doit se réserver un excès de stabilité. Pour cela, on se posera cette condition que la distance FW du point W à l'arête extérieure soit une fraction déterminée, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ de l'épaisseur totale FE de la culée (même relation entre UX et UT) ; ou bien on exigera que l'équilibre ne puisse être détruit que par un multiple déterminé de la poussée Q. Ce second procédé est préférable, parce que le premier donne, toutes les fois que la hauteur FK de la culée est petite, des épaisseurs de culée très-faibles, qui ne seraient pas suffisantes pour résister convenablement aux secousses accidentelles et aux augmentations subites et considérables des forces qui en résultent.

Cherchons donc à déterminer combien de fois, dans les constructions durables, la poussée horizontale Q peut être augmentée sans que la rupture s'ensuive. Pour cela, nous admettrons que l'élargis-

sement des fondations n'est que le faible empatement ordinairement ménagé pour donner à l'assise d'établissement une assiette convenable. Nous négligeons donc cet empatement, et nous nous proposons de déterminer le coefficient par lequel il faut multiplier Q pour que la résultante générale passe par le point extrême F′ de la fondation unie à la culée.

Conservons les dénominations et les hypothèses du paragraphe précédent, et posons en outre :

e, épaisseur constante AO mesurée depuis l'intrados ;

f, la hauteur E′A de la culée et de la fondation au-dessous des naissances ;

g, la hauteur F′K de la culée entière avec la fondation et la surcharge supérieure ;

n, le coefficient cherché.

On exprime l'équilibre de rotation autour de F′ de la poussée nQ agissant en D et du poids du demi-ouvrage, on a :

$$n\,(f+b+c)\,\mathrm{Q}=\tfrac{1}{2}(e-\delta)^2\,(g-f)+\tfrac{1}{2}e^2f+e\mathrm{P}+\mathrm{M}\,;$$

ou

$$(1)\quad \tfrac{1}{2}e^2g+e\,[\mathrm{P}-\delta\,(g-f)]-[n\,(f+b+c)\,\mathrm{Q}-\mathrm{M}-\tfrac{1}{2}\delta^2\,(g-f)]=o\,;$$

ou

$$(2)\qquad n=\frac{\tfrac{1}{2}e^2g+e\,[\mathrm{P}-\delta\,(g-f)]+\mathrm{M}+\tfrac{1}{2}\delta^2\,(g-f)}{(f+b+c)\,\mathrm{Q}}.$$

Dans les ponts ordinaires, où la charge passe aussi sur la culée, on a :

$$g=f+b+c+h.$$

Le tableau inséré au paragraphe précédent donne la valeur du coefficient de stabilité n pour un grand nombre de ponts existants; seulement on a pris dans le calcul, pour l'épaisseur e de la culée, celle de la culée aux naissances, ne tenant pas compte ainsi des redans ou contre-forts. Les nombres de ce tableau sont très-divergents. On peut en conclure cependant que, pour les ponts-routes, la valeur $n=2{,}5$ est nécessaire et suffisante. Pour les viaducs de chemin de fer, il sera sage d'adopter $n=3$.

Ayant n, l'équation (1) donnera l'épaisseur e de la culée projetée :

$$(3)\quad e=\frac{1}{g}\left\{-[\mathrm{P}-\delta\,(g-f)]+\sqrt{2g\,[n\,(f+b+c)\,\mathrm{Q}-\mathrm{M}-\tfrac{1}{2}\delta^2\,(g-f)]+[\mathrm{P}-\delta\,(g-f)]^2}\right\}$$

Dans cette formule, P, M ont toujours les valeurs données par les expressions (1) et (2), Q la valeur (3) ou (7) du paragraphe précédent.

Si l'on prend pour les ponts-routes $n=2,5$, on trouve pour la culée du pont de Neuilly, $e=9^m,10$; pour le pont de Brunswick (n° 5), $e=4^m,55$: en réalité, $e=9^m,75$ pour le premier, et $3^m,80$ pour le second.

Si ces ponts devaient porter des chemins de fer ($n=3$), on aurait $e=11^m,00$; $e=5^m,30$.

Dans la pratique on ne prendra jamais de valeur de e inférieure à $0^m,63$; au-dessous de cette limite, des murs en moellons seraient dépourvus de cohésion.

Si l'on fait croître la hauteur h de la charge, on augmente simultanément la force Q, défavorable à la stabilité, la force P, qui lui est favorable, le moment de cette force, enfin les épaisseurs c et d. Il en résulte que l'épaisseur e de la culée ne croît pas indéfiniment avec h, qu'elle a au contraire un maximum, et que, pour des charges plus fortes, elle s'approche d'une certaine limite par une diminution progressive.

Comme dans la pratique la charge est ordinairement apportée tout entière après l'achèvement de la voûte, il ne serait pas permis d'appliquer pour les fortes charges les valeurs données par la formule (3) si elles sont moindres que le maximum. C'est ce maximum qui sera adopté, afin que la voûte demeure stable pendant le chargement, au moment où la charge atteint la hauteur qui répond à ce maximum.

Nous ne nous arrêterons pas davantage ici à ce maximum de e et à la hauteur h qui lui correspond ; au paragraphe 66 ci-après, on trouvera des tables donnant pour diverses charges les épaisseurs des culées, et montrant avec une exactitude bien suffisante dans la pratique pour quelle valeur de h e est maximum.

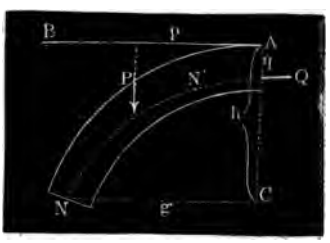
Quand un pont a plusieurs arches égales que l'on veut construire l'une après l'autre, ou si l'on veut garantir l'ouvrage contre la rupture d'une arche, il faut donner à toutes les piles l'épaisseur e de l'équation (3). Si, ne tenant pas compte de ces éventualités, on veut profiter de la possibilité que donnent les actions égales et opposées de deux arches voisines de diminuer l'épaisseur des piles, on déterminera l'épaisseur dont il s'agit, en se guidant sur des constructions analogues. On peut admettre que cette épaisseur soit réduite à la

moitié de celle des culées. Elle doit d'ailleurs égaler au minimum $2d$, puisqu'elle doit supporter les retombées de deux arches consécutives. D'après cela, les piles intermédiaires du pont de Neuilly auraient eu $\frac{1}{2}e = 4^m,55$; on leur a donné $4^m,22$.

§ 24. Procédé pratique pour la construction de la courbe des pressions.

Nous ne donnerons pas ici de formules analytiques ni de constructions rigoureuses d'une courbe des pressions d'après des éléments donnés. Cela nous mènerait à des calculs et des opérations trop compliqués et peu pratiques; nous nous bornerons à exposer avec détail une méthode pratique pour le tracé de cette courbe, fondée sur une construction graphique approximative.

Fig. 58.



Une courbe des pressions est déterminée quand on en connaît un point avec la pression en ce point en grandeur et en direction, par exemple son point culminant et la poussée horizontale à la clef. Elle est encore déterminée quand on connaît deux de ses points. Nous nous ramènerons dans tous les cas à déterminer le sommet à la clef et la poussée d'après les éléments donnés. Tel est le but des calculs simples qui suivent :

Soit AB l'horizontale passant par le sommet A, et A le point de départ des distances horizontales et verticales des forces que nous aurons à considérer (fig. 58);

Q, la poussée;

q, sa distance verticale à AB;

N, un point quelconque de la courbe des pressions;

g, h, les coordonnées NC, AC de ce point;

P, le poids de la partie de voûte MN, y compris la surcharge;

p, la distance horizontale de la verticale P au point A.

Si l'on a à considérer un autre point N′ de la courbe des pressions, on aura une notation analogue : q', p', g', h', P′.

Posons pour abréger :

$$g - p = a \qquad g' - p' = a'$$
$$h - q = b \qquad h' - q' = b'$$

et

$$h - h' = b - b' = e.$$

Cela posé, si l'on connaît :

1° le point d'application M de la poussée Q et cette poussée elle-même, on peut commencer sans calcul préalable la construction ci-après ;

2° le point M d'application de la poussée et un autre point N de la courbe, on a :

$$a\mathrm{P} = b\mathrm{Q}, \quad \text{d'où } \mathrm{Q} = \frac{a\mathrm{P}}{b} \ (1);$$

3° Deux points N, N′ de la courbe des pressions, on a :

$$a\mathrm{P} = b\mathrm{Q} = (b' + e)\mathrm{Q},$$
$$a'\mathrm{P}' = b'\mathrm{Q},$$

d'où

$$\mathrm{Q} = \frac{a\mathrm{P} - a'\mathrm{P}'}{e} \quad (2),$$

$$q = h - \frac{a\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \quad (3).$$

Quant au poids P et à sa distance p au point A, la méthode qui va suivre, et qui sert en même temps à la construction de la courbe des pressions cherchées, fournit un moyen simple pour trouver leurs valeurs sans calculs.

Qu'on se représente une tranche de la voûte comprise entre deux plans verticaux distants d'un mètre, avec toutes les charges qui reposent sur elle. On prend pour unité des forces à considérer le poids d'un mètre cube de la matière des voussoirs ; les surfaces de la section verticale de la voûte, mesurées en mètres carrés, représenteront les poids des parties de voûte correspondantes.

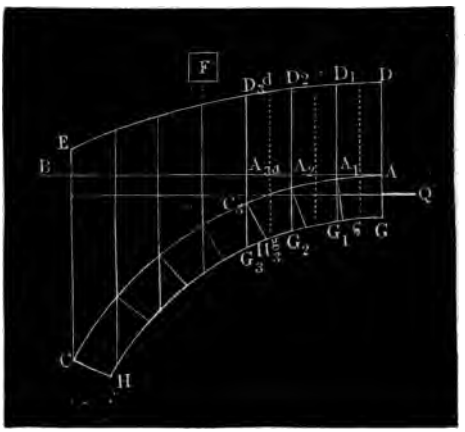
Si la voûte est chargée de masses permanentes qui aient un poids spécifique différent de celui de l'arc lui-même, on tracera la courbe limite fictive de la surcharge, de manière à réduire les ordonnées verticales dans le rapport inverse des densités de la charge et de l'arc. On se ramènera ainsi au cas d'une masse homogène.

Si l'on a à considérer des poids isolés appliqués en certains points, on les remplacera par un nombre convenable de mètres

cubes de la matière des voussoirs, censés appliqués en ces points.

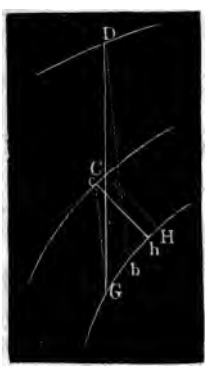
Cela fait, on prend sur AB des longueurs à peu près égales, et par les points de division on mène des verticales de l'intrados à la courbe DE, qui limite supérieurement la charge (fig. 59); on calcule successivement les trapèzes ainsi formés en menant par les points milieux des côtés des verticales et considérant chaque trapèze comme un rectangle ayant pour hauteur la verticale moyenne.

Fig. 59.



On admet ensuite que le centre de gravité de ce trapèze coïncide avec celui du rectangle correspondant; celui du trapèze $D_3D_2G_2G_1$ sera ainsi sur la verticale moyenne *dg* qui partage en parties égales l'horizontale A_2A_3. Menons par C_3 le joint C_3H_3: nous considérerons la masse DD_3G_3G comme représentant le poids qui repose sur le joint C_3H_3; cela revient à négliger le triangle $H_3C_3G_3$, erreur en général fort petite. Si pourtant on la considère comme sensible, comme cela peut être aux joints rapprochés des naissances, et généralement quand la charge est nulle ou très-faible, on pourra corriger le joint C_3H_3 en le remplaçant par un autre *ch*, obtenu au moyen de la très-simple construction suivante :

Fig. 60



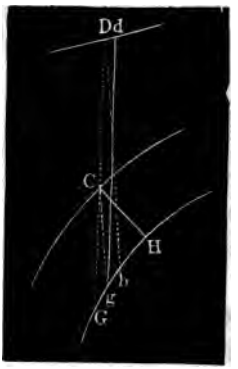
Soient DCG (fig. 60) le côté du trapèze dont il s'agit et CH le joint passant par C; on partage GH en deux parties égales en *b*, on mène G*c* parallèle à *b*D; *ch* est le joint corrigé. Dans le cas où la surcharge est nulle, cela revient à faire passer le joint par le milieu de CG.

Inversement, étant donné un joint CH, si l'on cherche la verticale *dg* (fig. 61) qui limite la portion de charge afférente à ce joint, eu égard à la correction dont nous nous occupons, on mènera par C la verticale DG, et pour corriger celle-ci on partagera GH en deux

parties égales en b, on mènera Cg parallèle à Db, et gd sera la verticale cherchée.

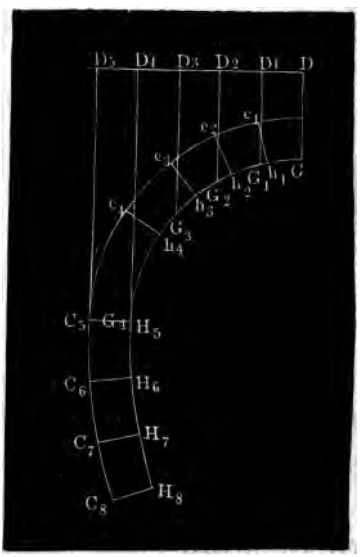
Si les verticales qui se rapprochent des naissances ne rencontrent plus l'intrados, comme, par exemple, la verticale EC de la figure 59, il sera toujours facile, dans chaque cas, d'évaluer les aires et les distances des centres de gravité des parties de voûte isolées à joindre aux trapèzes supérieurs et d'assigner le joint auquel est appliqué le poids de toutes les portions de voûte qui précèdent.

Fig. 61.



Ce cas se présente particulièrement pour les voûtes de souterrain qui se continuent au-dessous du joint horizontal ; soit, par exemple, la figure 62 : nous formerons cinq trapèzes limités par les verticales D_1G_1, D_2G_2, D_3G_3, D_4G_4, D_5G_5 ; le centre de gravité de chacun sera supposé sur la verticale moyenne ; les joints c_1h_1, c_2h_2, c_3h_3, c_4h_4, C_8H_8 seront tracés, savoir les trois premiers, d'après le procédé de correction décrit plus haut, le quatrième d'après la disposition de la figure, le cinquième sans correction. Au-dessous de ce joint horizontal, nous avons encore quelques parties de voûte, pour lesquelles on ne doit plus tenir compte de la surcharge directe, et qui seront limitées par des joints C_6H_6, C_7H_7; elles seront considérées comme des rectangles, et leurs centres de gravité seront aux centres de figure.

Fig. 62.



Si la voûte supporte des poids isolés F, on fera bien d'établir d'avance la division en trapèzes, de telle sorte que l'une des lignes de division passe par le point d'application de chacun de ces poids. On remarquera, du reste, que ces poids ne sont que la fraction des poids isolés réellement agissants qui correspond à l'unité de lon-

gueur de la voûte. Si le poids est appliqué sur la clef, il ne compte que pour moitié dans la demi-voûte qu'on considère.

Après ces préparations, on fait le calcul d'après le type de calcul ci-après : les poids des parties élémentaires DGG_1D_1, $D_1G_1G_2D_2$, $D_2G_2G_3D_3$, etc., simplement désignées par les n°s 1, 2, 3, etc., seront calculés au moyen de leurs éléments (colonnes (2) et (3)) et figureront à la colonne (4). On indique les distances des centres de gravité partiels à la clef dans la colonne (5). Les produits des nombres (4) et (5) sont les moments des poids (colonne 6). Puis on cumule, à partir de la clef, les poids isolés (8) et les moments (9). Les quotients de la division de (9) par (8) sont les distances horizontales des centres de gravité des sommes partielles à la verticale de la clef.

Les sommes des colonnes (4) et (6) doivent reproduire respectivement les deux derniers nombres des colonnes (8) et (9), ce qui constitue une vérification.

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m	m q.	m.	m c.		m q.	m c.	m.
1	0,94	1,57	1,48	0,47	0,70	1	1,48	0,70	0,47
2	0,94	2,20	2.07	1,41	2,92	1 + 2	3,55	3,62	1.02
3	0,94	3,14	2,95	2,35	6,93	1 + 2 + 3	6,50	10,55	1,62
4	0,94	3,77	3,54	3,30	11,68	1 + 2 + 3 + 4	10,04	22,23	2,20
5	0,63	4,71	2,97	4,08	12,12	1 + 2 + 3 + 4 + 5	13,01	34,35	2,64
	4,39		13,01		34,35				

On intercalera facilement dans ce tableau des subdivisions de l'un quelconque des voussoirs élémentaires : 3.*a*, 3.*b*,... On intercalera aussi, chacun à son rang, les poids isolés : I, II, III..., s'il en existe.

Le tableau précédent montre que la surface de la demi-voûte entière avec sa charge égale $13^{mq},01$, que son moment est $34^{mc},35$, et la distance de son centre de gravité au joint de la clef $2^{m},64$. On a donc ici :

$$P = 13,01 \; ; \; p = 2,64 \; ; \; Pp = 34,35.$$

Si maintenant on voulait faire passer une courbe des pressions par le point supérieur du joint de la clef et le point intérieur du joint de culée, on aurait :

$$q=0,\ b=h=4^{m},70,\ g=3,77,\ \text{d'où}\ a=g-p=1,13.$$

La formule démontrée plus haut donnerait :

$$Q=\frac{1,13\times 13,01}{4,70}=3,12.$$

Si l'on demande, au contraire, une courbe des pressions passant par le point le plus haut du deuxième joint et le point le plus bas du quatrième, soit pour le premier $h'=0,078$, $g'=0,94$, et pour le second $h=2,83$, $g=3,14$, on aura pour le premier point (qui répond à la 1re ligne du tableau) :

$$p'=0,47,\ P'=1,48,\ a'=g'-p'=0,94-0,47=0,47,$$

et pour le second point (3e ligne du tableau) :

$$p=1,62,\ P=6,50,\ a=g-p=3,14-1,62=1,52.$$

$$\text{En outre, } e=h-h'=2,83-0,078=2,752.$$

Les formules connues donnent pour la poussée Q et sa distance q au point le plus haut de la clef :

$$Q=\frac{1,52\times 6.50-0,47\times 1,48}{2,75}=3,35.$$

$$q=2,83-\frac{1,52\times 6,50}{3,35}=-0,13.$$

De la valeur négative de q, il faut conclure que la courbe cherchée passe à $0^{m},13$ au-dessus du sommet de la voûte.

Si maintenant on compose successivement par le parallélogramme des forces la poussée Q, trouvée en grandeur et en position par l'un des deux calculs précédents, avec les poids verticaux dont les grandeurs et les lignes d'application sont définies par les colonnes (9) et (10) du tableau précédent, les points de rencontre des diagonales résultantes avec les joints correspondants seront autant de points de la courbe des pressions cherchée.

Les paragraphes suivants contiennent plusieurs exemples de calcul et de construction par cette méthode, dont l'application est toujours facile et rapide.

§ 25. Premier exemple. Têtes du pont de Neuilly.

Nous prendrons pour premier exemple la tête du pont de Neuilly (fig. I, à la fin du volume). Cette voûte est un arc de cercle dont la demi-corde égale $19^m,86$ et la flèche $4^m,22$. Son épaisseur à la clef est 1,62, et à la culée 2,76 ; les murs qui forment parement au-dessus de la voûte ont $1^m,95$ de hauteur au-dessus du sommet de l'arc.

La forme aplatie de cette voûte permet de conclure tout de suite que la vraie courbe des pressions devra passer par le sommet du joint de la clef et l'extrémité intérieure du joint de culée.

Pour construire cette courbe, on partage la surface de la voûte et de sa surcharge en sept voussoirs, à partir du sommet : chacun des cinq premiers a une largeur de $3^m,25$, le sixième $3^m,61$ et le septième, qui comprend la masse de la voûte d'une arête à l'autre du joint de culée, $1^m,17$. On a fait la correction des joints pour plus d'exactitude.

Le tableau suivant donne les éléments du calcul et de la construction.

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m	m.	m. q.	m.	m. c		m. q.	m c.	m.
1	3,25	3,6	11.7	1,62	18,9	1	11,7	18,9	1,62
2	3,25	3,8	12,4	4,87	60,4	1 + 2	24,1	79,3	3,28
3	3,25	4,3	13.8	8,12	112,1	1 + 2 + 3	37,9	191,4	5,07
4	3,25	4,9	15.8	11,37	179,6	1 + ... 4	53,7	371,0	6,92
5	3,25	5,8	19,0	14,62	277,8	1 + ... 5	72,7	648,8	8,94
6	3,61	7,0	25.2	18,07	455,4	1 + . . . 6	97,9	1104,2	11,28
7	1,17	6,4	7,5	20,44	153,3	1 + . . 7	105,4	1257,5	11,93
			105.4		1257,5				

La courbe des pressions doit passer par le point le plus haut du joint au sommet : $q=o$; $b=h=5,85$; $g=19,86$; et de la co-

lonne (10) on tire $p=11,93$; $a=g-p=7,93$, et enfin, par la colonne (8), $P=105,4$.

On fera donc ainsi le calcul :

$$Q=\frac{aP}{b}=\frac{7.93\times 105.4}{5,85}=143.$$

On porte ensuite sur une horizontale, partant du sommet de la clef et dirigée du côté de la demi-voûte, les longueurs inscrites à la colonne (10) ; on porte, à partir de chacun de ces points de division, sur la même horizontale et dans le sens opposé au premier, des longueurs égales représentant la poussée Q ; on compose cette poussée par le parallélogramme des forces, successivement avec les poids de la colonne (8) ; les points de rencontre des résultantes avec les joints sont les points de la vraie courbe des pressions.

Une courbe des pressions répondant au maximum de la poussée passerait au contraire par le point le plus bas du joint à la clef et par le point supérieur du joint de culée ; on calculerait cette poussée par les éléments suivants qu'on introduirait dans les formules :

$$a=g-p=21,03-11,93=9,10,$$
$$b=h-q=3,15-1,62=1,53,$$

d'où

$$Q=\frac{aP}{b}=\frac{9.10\times 105,4}{1,53}=627.$$

§ 26. Deuxième exemple. Anse de panier du pont de Neuilly.

Cette anse de panier a une ouverture de 39 mètres et une flèche de $9^m,75$. L'épaisseur de la voûte est, au sommet comme à la culée, de $1^m,62$, et la charge uniforme est supposée de $0^m,65$ (fig. II à la fin du volume). Pour calculer le poids de la voûte entière avec charge et tympans, je partage la surface en huit parties : les cinq premières, à partir de la clef, ont $3^m,25$ de largeur, les trois dernières $1^m,62$. D'après cela les quantités nécessaires pour la construction de la courbe sont données par la table suivante :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m	m c.		m q	m.c.	m.
1	3,25	2,31	7,51	1,62	12,2	1	7,51	12,2	1,62
2	3,25	2,47	8,03	4,87	39,1	1 + 2	15,54	51,3	3,31
3	3,25	2,96	9,62	8,12	78,1	1 + 2 + 3	25,16	129,4	5,17
4	3,25	3,77	12,25	11,37	139,3	1 + ... 4	37,41	268,7	7,18
5	3,25	5,04	16,38	14,62	239,5	1 + ... 5	53,79	508,2	9,46
6	1,62	6,73	10,90	17,06	186,0	1 + ... 6	64,69	694,2	10,72
7	1,62	8,84	14,32	18,69	267,6	1 + ... 7	79,01	961,8	12,19
8	1,62	12,02	19,47	20,31	395,4	1 + ... 8	98,48	1357,2	13,78
			98,48		1357,2				

Pour reconnaître la position de la vraie courbe des pressions, construisons d'abord une courbe des pressions passant par le point le plus haut de la clef et le point intérieur des naissances :

$$q=o; b=h=11,37; a=g-p=19,50-13,78=5,72; P=98,48;$$

d'où

$$Q=\frac{aP}{b}=\frac{5,72\times 98,48}{11,37}=49,5.$$

La ligne construite d'après ces données coupe l'intrados entre le deuxième et le troisième joint, à partir de la clef, s'en éloigne le plus vers le sixième joint, et le rencontre de nouveau au joint de culée. Donc, la vraie courbe des pressions passera par le point le plus haut de la clef et par le point intérieur du sixième joint, où elle devra toucher l'intrados.

Le calcul de la poussée qui répond à cette courbe se fera d'après la formule connue ; mais on n'y fera entrer que le poids de la surface comprise entre la clef et le sixième joint, savoir, 64,69 avec un bras de levier 10,72 ; en même temps on a pour les coordonnées g', h' du point dont il s'agit, 16,90 et 6,05.

Ainsi, $b'=h'=6,05$; $a'=g'-p'=16,90-10,72=6,18$;

$$P'=64,69, \text{ et } Q'=\frac{a'P'}{b'}=\frac{6,18\times 64,69}{6,05}=66,0.$$

La courbe des pressions ainsi construite ne reste pas entièrement dans l'intérieur de la voûte ; elle coupe l'extrados dans le voisinage du joint de culée, d'où il résulte que cette voûte ne possède pas la stabilité requise.

Dans le voisinage des naissances, les pressions moyennes sont supportées non par les joints considérés jusqu'ici, mais par le tympan, lequel, par la nature de ses joints et le soin apporté à la construction, ne peut nullement offrir une résistance égale à celle de la voûte. On peut admettre que le constructeur de ce pont aurait donné une plus grande épaisseur à la clef ou une autre forme à la voûte, s'il eût connu la forme de la vraie courbe des pressions.

§ 27. Troisième exemple. Le même arc du pont de Neuilly, chargé de poids isolés.

Pour faire ressortir l'influence qu'exercent les poids isolés sur la courbe des pressions, admettons que l'anse de panier étudiée dans le paragraphe précédent soit chargée en deux points différents de poids isolés (fig. III à la fin du volume).

Dans ce cas, le mieux est de faire le partage de la voûte de telle sorte que le point d'application de chaque poids soit sur une ligne de division ; nous avons placé ici nos poids de manière à conserver le mode de division du paragraphe précédent, ce qui permet de faire ressortir par comparaison des deux tableaux la variation des courbes des pressions.

Je suppose que le point d'application de l'un des poids, A, soit dans le joint du sommet, celui du second poids B à la quatrième ligne de division à partir du sommet, et que chacun de ces poids réponde à une surface de $10^{mq},56$. Comme nous ne considérons qu'un demi-arc, nous n'avons à compter le poids placé au sommet que pour la moitié de sa valeur, soit $5^{mq},28$.

Ces poids isolés s'intercaleront comme il suit dans le tableau de calcul, suivant la distance de leurs points d'application au sommet :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m q	m.	m c.		m q.	m.c.	m.
A	»	»	5,28	0	0	A	5,28	0	0
1	3,25	2,31	7.51	1,62	12,2	A + 1	12.79	12,2	0,95
2	3,25	2,47	8,03	4,87	39,1	A + 1 + 2	20,82	51,3	2,47
3	3,25	2,96	9,62	8,12	78,1	A + ... 3	30,44	129,4	4,25
4	3,25	3,77	12,25	11.37	139,3	A + ... 4	42.69	268,7	6,30
B	»	»	10,56	13,00	137,3	A + ... B	53,25	406,0	7,62
5	3,25	5,04	16.38	14.62	239,5	A + ... 5	69,63	645,5	9,27
6	1,62	6,73	10,90	17,06	186,0	A + ... 6	80,53	831,5	10,32
7	1,62	8,84	14,32	18,69	267,6	A + ... 7	94,85	1099,1	11,59
8	1,62	12,02	19,47	20,31	395,4	A + ... 8	114,32	1494,5	13,08
			114,32		1494,5				

On construira ensuite une courbe des pressions par le point le plus haut du joint à la clef et le point extérieur du joint de culée, vu que cette ligne, d'après le paragraphe précédent, s'approche assez de la vraie courbe des pressions. On aura alors :

$q=o$; $b=h=11,37$; $a=g-p=21,12-13,08=8,04$; $P=114,32$; d'où

$$Q=\frac{aP}{b}=\frac{8,04\times 114,32}{11,37}=80,84.$$

Cette courbe coupe encore l'intrados, et son maximum d'écart au delà de cette ligne a lieu vers le sixième joint; la vraie courbe des pressions passera donc à peu près par le point intérieur de ce joint.

Le calcul de la poussée correspondante aura lieu comme au paragraphe précédent, en faisant usage des huit premières lignes du tableau ci-dessus. La colonne (8) donnera la force $P'=80,53$, et la colonne (10) donnera son bras de levier $p'=10,32$. Les coordonnées du point intérieur du sixième joint sont $h'=6,05$, $g'=16,90$.

D'où :

$$b'=6,05\ ;\ a'=g'-p'=16,90-10,32=6,58,$$

et

$$Q'=\frac{a'P'}{b'}=\frac{6,58\times 80\ 53}{6,05}=87,6.$$

La courbe des pressions construite d'après ces données ne coupe certainement plus l'intrados : elle le touche ; son tracé est suffisamment exact et ne réclame plus de correction pour l'usage pratique.

On voit que l'intervention des poids isolés a rendu le minimum de la poussée beaucoup plus fort que le nombre calculé précédemment ; la courbe tracée s'éloigne aux environs de la culée de l'extrados encore plus que dans l'exemple précédent. Il faudrait dans le cas actuel, pour parvenir à la stabilité cherchée, donner à la voûte une épaisseur plus grande encore vers la culée ou bien changer le profil de la voûte.

§ 28. Quatrième exemple. Ogive.

L'arc ogival que nous considérons (fig. IV à la fin du volume) a une ouverture de $22^m,61$ et une flèche de $13^m,97$; le rayon de l'intrados est de $25^m,12$, celui de l'extrados de $27^m,79$. L'épaisseur normale de la voûte à la culée est de $2^m,04$, et à la clef de $1^m,26$. On suppose une charge uniformément répartie, ayant $2^m,51$ de hauteur au-dessus de la clef.

Nous partageons la surface de la voûte et du tympan en six parties, les quatre premières de $2^m,51$, la cinquième de $1^m,26$, et la sixième de $1^m,88$: ces nombres, introduits avec les hauteurs correspondantes dans le tableau suivant, donnent les quantités nécessaires au calcul et à la construction de la courbe des pressions.

POIDS ÉLÉMENTAIRES.						SOMMES PARTIELLES			
Numéros	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q	m.	m c.		m. q.	m. q.	m.
1	2,51	4,71	11,82	1,26	14,9	1	11,82	14,9	1,26
2	2,51	6,63	16,64	3,77	62,7	1 + 2	28,46	77,6	2,72
3	2,51	9,11	22,87	6,28	143,6	1 + 2 + 3	51,33	221,2	4,31
4	2,51	12,40	31,12	8,79	273,5	1 + ... 4	82,45	494,7	6,00
5	1,26	16,17	20,37	10,68	217,6	1 + ... 5	102,82	712,3	6,92
6	1,88	17,65	33,18	12,25	406,4	1 + ... 6	136,00	1118,7	8,22
			136,00		1118,7				

On construira dans ce cas, comme précédemment, une courbe des pressions passant par le point le plus haut du joint à la clef et le point intérieur du joint de culée. On a :

$$q = o\,;\ b = h = 15{,}39\,;\ a = g - p = 11{,}30 - 8{,}22 = 3{,}08\,;$$

$$P = 136{,}00.\ \text{D'où}\ Q = \frac{aP}{b} = \frac{3{,}08 \times 136\,00}{15{,}39} = 27{,}2.$$

La partie supérieure de cette eourbe est entièrement en dehors de l'extrados, tandis que la partie inférieure demeure dans l'épaisseur de la voûte ; la vraie courbe des pressions ne passe donc pas par le point le plus haut de la clef ; elle rencontre la clef en un point assez bas pour qu'elle vienne toucher l'extrados en quelque point correspondant sensiblement au joint où la courbe construite précédemment s'écarte le plus de l'extrados au dehors de la voûte : ce qui a lieu ici entre le premier et le deuxième joint.

Partageons donc le deuxième trapèze en deux parties, de sorte que le joint correspondant à la division nouvelle coupe l'extrados au point de contact supposé ; ces deux parties figureront au lieu de la partie n° 2 du tableau précédent. Le calcul se fera comme il suit :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m	m	m. q.	m.	m. c.		m q	m c.	m
1	2,51	4,71	11,82	1,26	14,9	1	11,82	14,9	1,26
2*a*	1,10	5,97	6,57	3.06	20,1	1 + 2*a*	18.39	35,0	1,90
2*b*	1,41	7,06	9,95	4,32	43,0	1 + 2*a* + 2*b*	28,34	78,0	2,75
3	2,51	9,11	22,87	6,28	143,6	1 + ... 3	51,21	221,6	4,33
4	2,51	12,40	31,12	8,79	273,5	1 + . . . 4	82,33	495,1	6,02
5	1,26	16,17	20,37	10,68	217,6	1 + ... 5	102,70	712,7	6,94
6	1,88	17,65	33,18	12,25	406,4	1 + ... 6	135,88	1119,1	8,23
			135,88		1119,1				

Nous nous trouvons dans le troisième cas du paragraphe 24, où l'on connaît deux points de la courbe des pressions : le point intérieur du joint de culée et le point extérieur du joint 2,*a*. La poussée

n bras de levier q, par rapport au point le plus haut du joint f, sont donnés par les formules :

$$Q = \frac{aP - a'P'}{e} \text{ et } q = h - \frac{aP}{Q}.$$

coordonnées du point 2,a sont $g' = 3,77$, $h' = 2,35$, tandis que ce P′ (située au-dessus du joint 2,a) égale 18,39 (colonne 8), bras de levier $p' = 1,90$ (colonne 10) ; pour le point intérieur it de culée on a de même :

$$g = 11,30 \text{ ; } h = 15,39 \text{ ; } P = 135,88 \text{ ; } p = 8,23.$$

alcul s'achèvera donc ainsi :

$$a = g - p = 11,30 - 8,23 = 3,07,$$
$$a' = g' - p' = 3,77 - 1,90 = 1,87,$$
$$e = h - h' = 15,39 - 2,35 = 13,04,$$
$$Q = \frac{aP - a'P'}{Q} = \frac{3,07 \times 135,88 - 1,87 \times 18,39}{13,04} = 29,3$$
$$q = h - \frac{aP}{Q} = 15,39 - \frac{3,07 \times 135,88}{29,3} = 1,16.$$

ourbe, construite d'après ces données, tombe partout entre los et l'extrados : c'est donc la véritable.
arrivait que cette deuxième ligne tombât encore elle-même ie en dehors de la voûte, on prendrait pour point de contact veau point que la figure indiquerait avec une grande exacti- en recommençant une dernière fois le calcul, on aurait avec ffisante approximation la courbe cherchée.

89. Cinquième exemple. Plein cintre supportant une forte charge.

prendrons pour exemple le pont construit à Schwelm, pour in de fer de Berg et Mark (fig. V à la fin du volume).
voûte est un plein cintre de $11^m,30$ d'ouverture, de $5^m,65$ de et $0^m,94$ environ d'épaisseur. La hauteur du remblai qui la voûte est de $31^m,40$ et répond à une charge de $25^m,12$ de ux aussi denses que ceux des voussoirs.

En partageant le massif entier en sept parties égales de 0m,94 chacune, nous formerons le tableau suivant :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,94	26,06	24,50	0,47	11,5	1	24,50	11,5	0,47
2	0,94	26,22	24,65	1,41	34,8	1 + 2	49,15	46,3	0,94
3	0,94	26,56	24,97	2,36	58,9	1 + 2 + 3	74,12	105,2	1,41
4	0,94	27,10	25,47	3,30	84,0	1 + ... 4	99,59	189,2	1,88
5	0,94	27,95	26,27	4,24	111,4	1 + ... 5	125,86	300,6	2,39
6	0,94	29,42	27,65	5,18	143,2	1 + ... 6	153,51	443,8	2,89
7	0,94	31,71	29,81	6,12	182,4	1 + ... 7	183,32	626,2	3,42
			183,32		626,2				

On construira une courbe des pressions passant par le point supérieur de la clef et le point extérieur des naissances : en effet, eu égard à la forte charge supportée dans le cas qui nous occupe, il est évident que la vraie courbe des pressions doit peu différer de cette ligne. On a :

$$q=0\,;\ b=h=6{,}59\,;\ a=g-p=6{,}59-3{,}42=3{,}17,$$

$$P=183{,}32\,;\ Q=\frac{aP}{b}=\frac{3{,}17\times 183{,}32}{6{,}59}=88{,}2.$$

La courbe des pressions qui répond à cette valeur de la poussée demeure en entier dans la voûte ; quoiqu'elle ne touche pas exactement l'intrados, on peut la prendre pour la vraie courbe des pressions ; en effet, la forte charge donnera lieu à une pression si considérable sur les joints, que la courbe doit s'éloigner un peu de l'intrados au joint de rupture.

On voit que cette voûte est stable, mais à la limite de stabilité, et que le remblayement devra être fait avec beaucoup de précaution pour qu'il ne se produise dans la voûte, d'un côté ou de l'autre, aucun dérangement.

§ 30. Sixième exemple.

L'arc représenté (fig. VI à la fin du volume) a une ouverture de $20^m,10$ et une flèche de $7^m,54$, une épaisseur de $1^m,57$ environ, et sur le sommet un tympan de $2^m,51$ de hauteur, lequel va s'abaissant de $1^m,41$ du sommet à la culée.

On divise en six parties la surface de la voûte et de son tympan, et l'on forme le tableau suivant :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c		m. q.	m. c.	m.
1	2,51	4,40	11,04	1,26	13,9	1	11,04	13,9	1,26
2	2,51	5,09	12,78	3,77	48,2	1 + 2	23,82	62,1	2,61
3	2,51	5,97	14,99	6,28	94,1	1 + . . . 3	38,81	156,2	4,02
4	1,26	6,85	8,63	8,16	70,4	1 + . . . 4	47,44	226,6	4,77
5	1,26	8,16	10,28	9,42	96,8	1 + . . . 5	57,72	323,4	5,59
6	1,57	10,46	16,42	10,83	177,8	1 + . . . 6	74,14	501,2	6,75
			74,14		501,2				

On construit ensuite une courbe des pressions passant par le point le plus haut de la clef et par le point intérieur du joint de culée. On a :

$$q=0\,;\ b=h=9{,}20\,;\ a=g-p=10{,}05-6{,}75=3{,}30\,;\ \mathrm{P}=74{,}14.$$

D'où $$\mathrm{Q}=\frac{a\mathrm{P}}{b}=\frac{3{,}30\times 74.14}{9{,}20}=36{,}4.$$

La courbe, construite au moyen de ces données, est d'abord au-dessus de l'extrados, puis traverse toute l'épaisseur de la voûte et se termine au-dessous de l'intrados. Il s'ensuit que la vraie courbe des pressions ne passe ni par le point le plus haut de la clef ni par le point intérieur du joint de culée, mais qu'elle doit toucher l'intrados et l'extrados. Ces deux points de contact seront placés approximativement aux joints d'écart maximum de la courbe précédemment tracée, soit pour l'extrados au premier joint, pour

l'intrados au cinquième joint. Les coordonnées du premier point sont $g'=2,51$ et $h'=0,88$; de plus, $P'=11,04$, $p'=1,26$; les coordonnées du second point sont $g=9,04$ et $h=6,15$; $P=57,72$ et $p=5,59$.

D'où :

$$a'=g'-p'=2,51-1,26=1,25$$
$$a=g-p=9,04-5,59=3,45$$
$$e=h-h'=6,15-0,88=5,27$$

$$Q=\frac{aP-a'P'}{e}=\frac{3,45\times 57,72-1,25\times 11,04}{5,27}=35,1.$$

$$q=h-\frac{aP}{Q}=6,15-\frac{3,45\times 57,72}{35,1}=0,47.$$

La courbe correspondante ne sort en aucun point de la voûte et peut être considérée comme la vraie courbe des pressions.

§ 31. Septième exemple. Plein cintre non chargé supérieurement.

Ce plein cintre (fig. VII à la fin du volume) a $6^m,28$ d'ouverture et $0^m,31$ d'épaisseur. Nous partageons la surface en sept parties, dont les largeurs sont respectivement de $0^m,63$ pour les quatre premières, de $0^m,31$ pour les trois dernières. Les joints correspondant aux segments successifs passeront ici par les points de rencontre des lignes de division, non avec l'extrados mais avec la courbe-milieu de la voûte, de sorte que la correction des joints est toute faite.

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,63	0,31	0,20	0,31	0.06	1	0,20	0,06	0,31
2	0,63	0,33	0,21	0,94	0,20	1 + 2	0,41	0,26	0,63
3	0,63	0,35	0,22	1,57	0,35	1 + ... 3	0,63	0,61	0,97
4	0,63	0,42	0,26	2,20	0,57	1 + ... 4	0,89	1,18	1,33
5	0,31	0,52	0,16	2,67	0,43	1 + ... 5	1,05	1,61	1,54
6	0,31	0,76	0,24	2,98	0,72	1 + ... 6	1,29	2,33	1,81
7	0,31	1,02	0,32	3,30	1,06	1 + ... 7	1,61	3,39	2,10
			1,61		3,39				

La courbe des pressions s'approchera du point extérieur du joint culée, et, pour cette raison, nous construirons d'abord une arbe allant de ce point au point le plus haut de la clef.

$$q=0\,;\ b=h=3{,}45\,;\ a=g-p=3{,}45-2{,}10=1{,}35\,;$$

$$P=1{,}61\,;\quad Q=\frac{aP}{b}=\frac{1{,}35\times 1{,}61}{3{,}45}=0{,}63.$$

Cette courbe passe sous l'intrados, entre le deuxième et le sixième nt, de sorte que la vraie courbe des pressions touchera l'intrados rs le cinquième joint.

Les coordonnées de ce point de contact supposé sont $g'=2{,}70$, $=1{,}83$. La surface $P'=1{,}05$ et son bras de levier $p'=1{,}54$.

où :

$$b'=1{,}83\,;\ a'=g'-p'=2{,}70-1{,}54=1{,}16\,;$$

$$Q'=\frac{a'P'}{b'}=\frac{1{,}16\times 1{,}05}{1{,}83}=0{,}67.$$

La courbe construite avec ces données sort de la voûte dans le isinage du joint de culée, d'où il suit qu'un plein cintre sans surarge, de $6^m{,}28$ d'ouverture et de $0^m{,}31$ d'épaisseur, n'est pas ble. Le joint de rupture est le deuxième joint, qui fait avec la rticale un angle de 60 degrés.

Cette vraie courbe des pressions diffère peu d'une parabole dans cas actuel : on a tracé sur l'épure cette dernière courbe, passant r les points extrêmes de la première, pour en montrer la marche mparée.

§ 32. Huitième exemple. Construction d'une voûte nt l'arc moyen soit une courbe des pressions possible.

Reprenons le plein cintre fortement chargé du paragraphe 29. us lui ferons subir la même division segmentaire que précédemnt, en subdivisant, pour plus de précision, la dernière partie en ux, de $0^m{,}47$ de largeur chacune (fig. VIII à la fin du volume).

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m.q.	m.	m.c.		m.q.	m.c.	m
1	0,94	26,06	24,50	0,47	11,5	1	24,50	11,5	0,47
2	0,94	26,22	24,65	1,41	34,8	1+2	49,15	46,3	0,94
3	0,94	26,56	24,97	2,36	58,9	1+ 3	74,12	105,2	1,41
4	0,94	27,10	25,47	3,30	84,0	1+ 4	99,59	189,2	1,88
5	0,94	27,95	26,27	4,24	111,4	1+ 5	125,86	300,6	2,39
6	0,94	29,42	27,65	5,18	143,2	1+ 6	153,51	443,8	2,89
7	0,47	31,71	14,90	5,87	87,5	1+ 7	168,41	531,3	3,14
8	0,47	31,71	14,91	6,34	94,5	1+ 8	183,32	625,8	3,42
			183,32		625,8				

On veut que la courbe moyenne de la voûte soit une courbe des pressions possible : commençons donc par construire une courbe des pressions, passant par les points milieux des joints extrêmes.

$$q=0,47\,;\ b=h-q=6,59-0,47=6,12\,;$$

$$g=6,12\,;\ p=3,42\,;\ a=g-p=6,12-3,42=2,70\,;$$

$$P=183,32.\quad Q=\frac{aP}{b}=\frac{2,70\times 183,32}{6,12}=80,9.$$

On construit ensuite une voûte dont cette courbe soit la courbe moyenne, et dont l'épaisseur soit constante et égale à celle de la voûte primitive : c'est ce que montre la figure IX à la fin du volume. Mais cette déformation ayant pu modifier notablement les éléments du calcul, on devra refaire le calcul, à titre de vérification. Nous formerons ainsi le tableau suivant, où la division précédente est conservée, sauf les trois dernières parties, qui, eu égard à l'obliquité des naissances, sont réduites à deux.

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m. q	m. c.	m.
1	0,94	26,16	24,59	0,47	11,6	1	54,59	11,6	0,47
2	0,94	26,47	24,88	1,41	35,1	1 + 2	49.47	46,7	0,94
3	0,94	27,07	25,45	2,35	59,8	1 + ... 3	74,92	106,5	1,41
4	0,94	28,17	26,48	3,30	87,4	1 + ... 4	101,40	193,9	1,92
5	0,94	29,11	27,36	4,24	116,0	1 + ... 5	128,76	309,9	2,39
6	0,98	30,90	30,28	5,21	157.8	1 + ... 6	159,04	467,7	2,86
7	0,86	31,71	27,27	6,12	166,9	1 + ... 7	186,31	634,6	3,39
			186,31		634,6				

Les coordonnées des points extrêmes demeurent les mêmes, mais le tableau nouveau donne de nouvelles valeurs de P et p : P=186,31 et p=3,39. D'où

$$a = g - p = 6{,}12 - 3{,}39 = 2{,}73$$

et

$$Q = \frac{aP}{b} = \frac{2{,}73 \times 186{,}31}{6{,}12} = 83{,}1.$$

La courbe des pressions construite d'après ces données ne diffère que fort peu de la première, et seulement aux cinquième et sixième joints. On peut donc se dispenser, au point de vue pratique, d'une seconde approximation, et considérer la voûte modifiée comme douée de cette propriété que sa courbe moyenne est une courbe des pressions possible.

Il est à peine besoin de rappeler que, bien que l'arc dont il s'agit ait une grande stabilité, sa courbe moyenne, courbe des pressions possible, ne saurait être néanmoins la vraie courbe des pressions : la vraie courbe des pressions obéit toujours aux lois connues et se rapproche des courbes-contours de la voûte.

On a tracé sur l'épure, en traits ponctués, une parabole passant par les points extrêmes de la courbe moyenne. Cette parabole s'éloigne peu de la courbe moyenne. Nous avions déjà remarqué précédemment que la courbe des pressions d'un arc sans tympans se rapproche aussi d'une parabole.

On est donc porté à admettre que, de toutes les courbes usuelles, la parabole est celle que l'on devra adopter comme courbe moyenne d'une voûte, pour avoir la plus grande stabilité sous des dimensions données.

SECTION B.

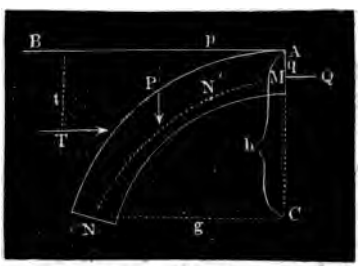
ÉQUILIBRE DE ROTATION DANS LE CAS DE CHARGES VERTICALES ET HORIZONTALES SYMÉTRIQUES.

§ 33. Construction de la courbe des pressions répondant à des charges verticales et horizontales.

Supposons qu'indépendamment des charges verticales une voûte soit sollicitée par des efforts horizontaux extérieurs, comme il arrive communément par la pression latérale d'un massif de terres : les propriétés des courbes des pressions, telles que nous les avons exposées, n'en sont nullement modifiées, si l'on se restreint aux cas pratiques.

Si, pour la construction d'une courbe des pressions, la poussée horizontale n'est pas une des données, on la calculera comme il suit :

Fig. 63.



Soit AB (fig. 63) l'horizontale qui passe par le point le plus haut A de la clef, et prenons A pour origine des distances horizontales et verticales ; soit Q la poussée horizontale, q sa distance verticale au point A; N un point quelconque de la courbe des pressions g, h; ses coordonnées NC, AC ; P le poids de la portion de voûte avec sa charge verticale ; p la distance horizontale du centre de gravité de cette masse au point A ; T la force horizontale extérieure qui agit sur cette portion de voûte ; t la distance verticale de son point d'application au-dessous de l'horizontale AB.

Pour un autre point N' de la courbe, A demeurant l'origine, on aura les quantités homologues g', h', P', p', T', t'.

Posons pour abréger :

$$g-p=a \qquad \text{et} \qquad g'-p'=a'$$
$$h-q=b \qquad\qquad h'-q'=b'$$

$$h-t=c \qquad \text{et} \qquad h'-t'=c'$$
$$g-g'=d$$
$$h-h'=b-b'=e.$$

L'équation des moments prend la forme

$$(1) \qquad bQ=aP+cT.$$

Si le point d'application M de la poussée est connu, q est connu : Q est donné par (1), d'où l'on tire

$$(2) \qquad Q=\frac{aP+cT}{b}.$$

Si l'on donne deux points N, N′ de la courbe, on joint à (1) l'équation correspondante.

$$(3) \qquad b'Q=a'P'+c'T'.$$

De (1) et (3) on tire Q et q.

$$(4) \qquad Q=\frac{(aP+cT)-(a'P'+c'T')}{e}.$$

$$(5) \qquad q=h-\frac{aP+cT}{Q}.$$

Pour construire la courbe des pressions cherchée on formera, outre le tableau décrit au paragraphe 24 pour les forces verticales, un tableau semblable pour les forces horizontales, en prenant soin de faire correspondre ces dernières aux joints préalablement corrigés en vue des forces verticales.

On aura ainsi toutes les valeurs nécessaires de P et T et de leurs bras de levier p et t. On composera pour chaque joint les forces de P et de T correspondantes; on aura les résultantes partielles, qui seront à leur tour composées avec la poussée Q, pour obtenir les points de la courbe des pressions par l'intersection de ces résultantes de P, T, Q avec les joints correspondants.

Les paragraphes suivants éclairciront ce que nous venons de dire, au moyen de quelques exemples.

§ 34. Premier exemple. Le tunnel sous la Tamise.

Le tunnel sous la Tamise est formé, depuis le radier jusqu'au sommet, d'une voûte continue dont la partie supérieure est un plein cintre de $4^m,32$ d'ouverture et $2^m,16$ de flèche, et dont la par-

tie inférieure est tracée avec un rayon intérieur de $8^m,61$. Chacune des parties de la voûte a environ $0^m,94$ d'épaisseur, mais le plein cintre supérieur est formé de trois rouleaux concentriques sans liaison entre eux, de $0^m,31$ chacun (fig. X à la fin du volume).

A parler rigoureusement, à chacun des trois rouleaux répond une courbe des pressions spéciale ; mais nous ne pouvons évaluer exactement la partie de la surcharge afférente à chaque rouleau : nous sommes donc obligés de les considérer tout simplement comme une masse parfaitement liée, et de calculer la courbe des pressions en conséquence.

Le terrain au-dessus du tunnel et l'eau de la Tamise exercent sur la voûte une pression correspondant à une charge de $7^m,54$ de hauteur formée de matériaux semblables à ceux des voussoirs. Pour ne pas compliquer le dessin, on n'a pas laissé subsister les verticales représentatives de la charge.

Pour construire la table des efforts verticaux, nous partagerons le quart de circonférence supérieur et sa surcharge en six parties ayant respectivement pour largeur 0,90 ; 0,63 ; 0,63 ; 0,31 ; 0,31 ; 0,31. La partie de voûte située au-dessous des naissances du plein cintre sera divisée en quatre segments ayant pour largeur l'épaisseur de la voûte, soit 0,94, et dont les bras de levier seront les distances de leurs centres de gravité à l'axe vertical du tunnel.

Pour obtenir les masses qui doivent servir au calcul des forces horizontales, je mène, par les points de rencontre de l'extrados et des joints ci-dessus définis, des horizontales qui coupent la verticale AB aux points *a*; *b*, *c*, *d*, ... Les segments A*a*, *ab*, *bc*, *cd* ..., sont les hauteurs des faces extérieures des segments consécutifs de la voûte. La poussée horizontale extérieure sur le deuxième segment de voûte, par exemple, poussée qui résulte de la surcharge, est égale au produit de la hauteur *ab* du segment de voûte par la hauteur de charge sur le milieu de *ab*, et par le coefficient *f*, qui dépend du talus naturel du terrain dont il s'agit.

Dans cet exemple et les suivants, nous admettrons que ce talus naturel est de 30 degrés. On a alors

$$f = \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \tang^2 30^\circ = \frac{1}{3}\,[1].$$

Les bras de levier correspondant à ces forces horizontales sont les

[1] Voir, pour la démonstration, le paragraphe 69 ci-après.

distances verticales des points milieux *k*, *l*, *m*, *n*,... des segments A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, ... à l'horizontale AC, qui passe par le point le plus haut de la clef.

On forme ainsi les deux tableaux suivants :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,90	8,52	7,67	0,45	3,45	1	7,67	3,45	0,45
2	0,63	8,85	5,58	1,22	6,81	1 + 2	13,25	10,26	0,77
3	0,63	9,51	5,99	1,84	11,02	1 + ... 3	19,24	21,28	1,11
4	0,31	10,64	3,30	2,32	7,66	1 + ... 4	22,54	28,94	1,28
5	0,31	10,64	3,30	2,63	8,68	1 + ... 5	25,84	37,62	1,46
6	0,31	10,64	3,30	2,94	9,70	1 + ... 6	29,14	47,32	1,60
7	0,94	0,47	0,44	2,63	11,57	1 + ... 7	29,58	58,89	1,64
8	0,94	0,76	0,71	2,58	1,83	1 + ... 8	30,29	60,72	1,66
9	0,94	0,75	0,70	2,48	1,74	1 + ... 9	30,99	62,46	1,68
10	0,94	0,94	0,88	2,32	2,04	1 + ... 10	31,87	64,50	1,70
			31,87		64,50				

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES								SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge.	Produit.	*f*	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	m.	m.	m. q.	$\frac{1}{3}$	m. q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,15	7,61	1,14		0,38	0,075	0,028	1	0,38	0,028	0,075
2	0,28	7,83	2,19		0,73	0,29	0,212	1 + 2	1,11	0,24	0,22
3	0,49	8,21	4,02		1,34	0,68	0,91	1 + ... 3	2,45	1,15	0,47
4	0,38	8,64	3,28		1,09	1,11	1,21	1 + ... 4	3,54	2,36	0,66
5	0,61	9,14	5,58		1,86	1,60	2,98	1 + ... 5	5,40	5,34	0,99
6	1,19	10,04	11,95		3,98	2,50	9,95	1 + ... 6	9,38	15,29	1,63
7	0,47	10,87	5,11		1,70	3,34	5,68	1 + ... 7	11,08	20,97	1,89
8	0,82	11,52	9,45		3,15	3,98	12,54	1 + ... 8	14,23	33,51	2,35
9	0,77	12,31	9,48		3,16	4,77	15,07	1 + ... 9	17,39	48,58	2,82
10	1,15	13,30	15,30		5,10	5,76	29,38	1 + ... 10	22,49	77,96	3,49
					22,49		77,96				

On fait passer, comme premier essai, une courbe des pressions

par le point le plus haut du joint à la clef et le point extérieur du dixième joint ; on calcule par l'équation

$$(1) \qquad Q = \frac{aP + cT}{b}$$

la poussée horizontale, dont le point d'application est connu.

Les coordonnées du point extérieur du dixième joint sont $g = 2,53$ et $h = 6,30$. La surface entière P de la voûte et de sa surcharge est donnée par la colonne (8) du premier tableau : 31,87 ; le bras de levier correspondant (col. 10) est $p = 1,70$.

On a de même

$$T = 22,49\ ,\ t = 3,49;$$

d'où :

$$a = g - p = 2,53 - 1,70 = 0,83,$$

$$c = h - t = 6,30 - 3,49 = 2,81;$$

et comme

$$q = 0,\ b = h = 6,30,$$

on en déduit

$$Q = \frac{aP + cT}{b} = \frac{0,83 \times 31.87 + 2,81 \times 22.49}{6,30} = 14,2.$$

On construira ensuite la courbe par points, comme il suit.

Pour avoir, par exemple, le point de cette courbe qui se trouve au troisième joint, on prendra sur l'horizontale de la poussée, à partir du point C et dans la direction CA, la longueur $Co = p = 1,11$ qui est le bras de levier du poids de la partie de voûte supérieure au troisième joint ; par le point *o* on mène la verticale *ros* qui rencontre en *r* la ligne d'application de la force horizontale déterminée par $t = 0,47$. Au point *r* on compose les forces P et T en leur substituant des longueurs *rs*, *su* qui leur sont proportionnelles ; la diagonale *ur* représente la résultante en grandeur et en direction. On composera ensuite cette résultante avec la poussée *vz*, en portant en *v* l'origine de *ur*. On aura la diagonale *vx* qui représente la résultante générale, et qui, convenablement prolongée, coupe le troisième joint au point *y*, qui est le point cherché.

La courbe ainsi construite demeure, dans l'exemple actuel, tout entière dans l'épaisseur de la voûte ; mais elle n'est pas la vraie courbe des pressions, puisque celle-ci doit toucher en même temps l'intrados. Le point qui en est le plus rapproché répond au sixième joint. Il faut donc calculer une nouvelle courbe passant par le point supérieur de la clef et par le point intérieur du sixième joint. Les

données relatives à ce dernier point sont : $g'=2,16$; $h'=3,10$; $P'=29,14$; $p'=1,60$; $T'=9,38$; $t'=1,63$.

D'où

$$a'=g'-p'=2,16-1,60=0,56.$$

$$c'=h'-t'=3,10-1,63=1,47.$$

$$q=0;\ b'=h'=3,10;$$

$$Q=\frac{a'P'+c'T'}{b'}=\frac{0,56\times 29,14+1,47\times 9,38}{3,10}=9,7.$$

Dans le passage de la première courbe à la deuxième, la poussée seule change ; les autres forces demeurent les mêmes ; on n'a besoin que de prendre sur wx ; à partir de w, la nouvelle valeur wx' de la poussée, et de tirer la ligne $x'v$, qui, convenablement prolongée, coupe le troisième joint au point y', qui appartient à la nouvelle courbe des pressions.

Cette nouvelle courbe ne sort pas de l'épaisseur de la voûte et suffit, par conséquent, pour la pratique, si l'on admet que le plein-cintre qui compose la partie supérieure de la voûte est un massif indivisible dans le sens de son épaisseur.

Si, au contraire, comme il arrive dans l'exemple choisi, cette masse est partagée en rouleaux concentriques, la méthode ci-dessus n'est bonne qu'à la condition que chacune des courbes des pressions afférentes aux différents rouleaux demeure dans le rouleau correspondant ; dans le cas contraire, un ou plusieurs des rouleaux étant trop faibles pour porter la part de charge qui leur incombe, l'ensemble de la voûte ne présenterait pas une force suffisante.

Pour faire cette vérification il suffit de s'attacher au rouleau extérieur, le plus défavorablement disposé puisque, pour une même épaisseur, son ouverture est plus grande.

On admettra que chacun de ces rouleaux concentriques doit supporter la même fraction de la charge entière, soit un tiers dans notre exemple. Ainsi l'on tracera (fig. XI, à la fin du volume) la limite supérieure *ab* de la charge afférente au rouleau extérieur, en prenant, sur chaque ordonnée verticale élevée à partir de l'extrados, une hauteur égale au tiers de celle qui représente la charge totale.

Le calcul et les opérations graphiques se feront exactement comme pour la voûte entière. On n'aura à considérer que le rouleau extérieur jusqu'au joint horizontal.

La courbe obtenue ainsi demeure tout entière dans l'épaisseur

du rouleau, mais sans toucher l'intrados : ce n'est pas la vraie courbe des pressions, et il faudrait, pour avoir celle-ci, faire passer une courbe par le point supérieur de la clef, et approximativement par le point intérieur du quatrième joint. L'exécution de cette construction n'est pas nécessaire ici ; notre but était seulement de montrer que, dans l'exemple choisi, chacun des trois rouleaux concentriques contient réellement une courbe des pressions qui ne sort pas de ses limites, de sorte que chaque rouleau porte bien, en effet, un tiers de la charge totale.

§ 35. Deuxième exemple. Plein cintre supportant un haut remblai de chemin de fer.

Nous reprenons ici la voûte du pont de Schwelm, déja étudiée au paragraphe 29, pour montrer la position que vient occuper la vraie courbe des pressions dans cette voûte, lorsqu'on tient compte non-seulement des forces verticales, mais aussi des forces extérieures horizontales qui agissent sur la voûte.

L'ouverture est de $11^m,30$, l'épaisseur de $0^m,94$ (fig. XII à la fin du volume). La charge, de $25^m,12$ de hauteur, n'est pas représentée sur la figure, faute de place.

Le tableau précédemment construit pour les forces verticales subsiste ; seulement nous partageons le septième segment en deux de $0^m,47$ de largeur. Voici les nouveaux tableaux :

POIDS ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m.q.	m.	m. c.		m.q.	m. c.	m.
1	0,94	26,06	24,50	0,47	11,5	1	24,50	11,5	0,47
2	0,94	26,22	24,65	1,41	34,8	1+2	49,15	46,3	0,94
3	0,94	26,56	24,97	2,36	58,9	1+....3	74,12	105,2	1,41
4	0,94	27,10	25,47	3,30	84,0	1+....4	99,59	189,2	1,88
5	0,94	27,95	26,27	4,24	111,4	1+....5	125,86	300,6	2,39
6	0,94	29,42	27,65	5,18	143,2	1+....6	153,51	443,8	2,89
7	0,47	31,71	14,90	5,89	87,8	1+....7	168,41	531,6	3,16
8	0,47	31,71	14,91	6,35	94,6	1+....8	183,32	626,2	3,42
			183,32		626,2				

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES								SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge.	Produit.	f	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	m.	m.	m. q.		m. q.	m.	m. c.		m. q	m. c.	m.
1	0,06	25,15	1,51	$\frac{1}{3}$	0,50	0,03	0,02	1	0,50	0,02	0,03
2	0,22	25,29	5,56		1,85	0,17	0,31	1 + 2	2,35	0,33	0,14
3	0,38	25,59	9,72		3,24	0,47	1,52	1 + ... 3	5,59	1,85	0,36
4	0,50	26,03	13,01		4,34	0,91	3,95	1 + ... 4	9,93	5,80	0,59
5	0,82	26,69	21,89		7,30	1,57	11,46	1 + ... 5	17,23	17,26	1,00
6	1,22	27,71	33,81		11,27	2,59	29,19	1 + ... 6	28,50	46,45	1,63
7	1.04	28,81	29,96		9,99	3,69	36,86	1 + ... 7	38,49	83,31	2,16
8	2,35	30,54	71,77		23,92	5,42	129,65	1 + ... 8	62,41	212,96	3,41
					62,41		212,96				

Faisons passer, comme au paragraphe 29, une courbe des pressions par le point supérieur du joint à la clef et par le point extérieur du joint de culée. Les données relatives à ce dernier sont : $g = h = 6,59$; $p = 3,42$; $t = 3,41$; $b = h = 6,59$; $P = 183,32$, et $T = 62,41$.

D'où

$$a = g - p = 6,59 - 3,42 = 3,17;$$
$$c = h - t = 6,59 - 3,41 = 3,18;$$
$$Q = \frac{aP + cT}{b} = \frac{3,17 \times 183,32 + 3,18 \times 62,41}{6,59} = 118,3.$$

Lorsque l'on ne considérait que les forces verticales, la courbe passant par les points m, n, touchait approximativement l'intrados, et pouvait, par conséquent, être considérée comme la vraie courbe des pressions ; mais la considération des forces extérieures horizontales a reculé la ligne dans la voûte, de sorte qu'il faut faire un nouvel essai pour obtenir la vraie courbe des pressions. Celle-ci devra toucher l'intrados vers le sixième joint. Les coordonnées correspondantes sont $g' = 4,87$ et $h' = 3,71$. La colonne (8) du premier tableau donne la surface de la partie de voûte supérieure au sixième joint, avec la surcharge : $P' = 153,51$. La colonne (10) donne le bras de levier $p' = 2,89$. Les colonnes (10) et (12) du deuxième tableau donnent de même $T' = 28,50$, $t' = 1,63$.

D'où

$$a' = g' - p' = 4,87 - 2,89 = 1,98;$$
$$c' = h' - t' = 3,71 - 1,63 = 2,08;$$
$$q = 0;\ b' = h' = 3,71;$$
$$Q = \frac{a'P' + c'T'}{b'} = \frac{1,98 \times 153,51 + 2,08 \times 28,50}{3,71} = 97,8.$$

La courbe construite d'après cette valeur de Q ne sort pas de l'épaisseur de la voûte, et peut ainsi être prise pour la vraie courbe des pressions. La voûte dont on s'occupe est donc stable, eu égard à la pression horizontale des terres.

On va voir au paragraphe suivant combien il importe de charger avec précaution une voûte de pont sur laquelle doit reposer un haut remblai, et d'élever la terre uniformément sur la voûte entière dès l'abord.

§ 35 *a*. Troisième exemple. Plein cintre sous un remblai en cours d'exécution.

L'intrados de cette voûte est décrit avec un rayon de $3^m,14$. L'épaisseur est $0^m,16$. Le remblai achevé doit atteindre une hauteur de $1^m,88$ au-dessus du sommet de la voûte (fig. XIII, à la fin du volume).

On a supposé, en traçant la figure, que des deux côtés de la voûte le remblai est élevé à toute hauteur et que ces deux massifs latéraux se rencontrent par leur pied au sommet de la voûte, qui sera recouvert en dernier lieu.

Dans cette disposition les forces horizontales extérieures prennent plus d'importance que les forces verticales, et tendent à augmenter la courbure de la courbe des pressions, ce qui rend plus facile sa sortie de la voûte. Nous avons pris à dessein une voûte très-mince, pour rendre cet effet plus sensible.

Supposons que le remblai soit de gravier, et admettons pour simplifier que son poids spécifique égale celui des voussoirs.

On partagera la voûte et sa charge en sept parties : les cinq premières ayant chacune $0^m,63$ de largeur, les deux dernières 0,078. D'où les deux tableaux suivants :

POIDS ÉLÉMENTAIRES.						SOMMES PARTIELLES.			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,63	0,35	0,22	0,31	0,07	1	0,22	0,07	0,31
2	0,63	0,85	0,54	0,94	0,51	1 + 2	0,76	0,58	0,75
3	0,63	1,48	0,93	1,57	1,46	1 + ... 3	1,69	2,04	1,21
4	0,63	2,32	1,46	2,20	3,21	1 + ... 4	3,15	5,25	1,66
5	0,63	3,55	2,24	2,83	6,34	1 + ... 5	5,39	11,59	2,15
6	0,078	5,12	0,40	3,18	1,27	1 + ... 6	5,79	12,86	2,22
7	0,078	5,18	0,40	3,26	1,30	1 + ... 7	6,19	14,16	2,29
			6,19		14,16				

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES.								SOMMES PARTIELLES.			
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge.	Produit.	f	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	m.	m.	m. q	$\frac{1}{3}$	m. q.	m.	m. c.		m. q.	m. c.	m.
1	0,063	0,22	0,014		0,005	0,031	0,000	1	0,005	0,000	0,031
2	0,19	0,69	0,13		0,04	0,16	0,006	1 + 2	0,045	0,006	0,16
3	0,35	1.32	0,46		0,15	0,42	0,063	1 + ... 3	0,195	0.07	0,36
4	0,60	2,14	1,28		0,43	0,89	0,38	1 + ... 4	0,625	0,45	0,72
5	1,16	3,39	3,93		1,31	1,77	2,32	1 + ... 5	1,935	2,77	1,44
6	0,31	4,30	1,33		0,44	2,51	1,10	1 + ... 6	2,375	3,87	1,63
7	0,63	4,84	3,05		1,02	2,98	3,04	1 + ... 7	3,395	6,91	2,04
					3,395		6,91				

Faisons passer maintenant une courbe des pressions par le point supérieur de la clef et le point intérieur du joint de culée. Les données du calcul de la poussée sont $g = 3,14$; $h = 3,30$; $p = 2,29$; $t = 2,04$; $P = 6,19$; $T = 3,40$.

D'où

$$a = g - p = 0,85 \; ; \; c = h - t = 1,26 \; ; \; b = h = 3,30.$$

$$Q = \frac{aP + cT}{b} = \frac{0,85 \times 6,19 + 1,26 \times 3,40}{3,30} = 2,89.$$

La courbe des pressions construite d'après ces données est en dehors de la voûte vers le haut, coupe l'extrados entre le quatrième et le cinquième joint et entre ensuite dans l'épaisseur de la voûte : ce ne peut donc être la vraie courbe des pressions. Celle-ci devra passer par le point intérieur du joint de culée et approximativement par le point extérieur du troisième joint, point où la première courbe s'écarte le plus de l'extrados en dehors.

Nous nous trouvons dans le deuxième cas du paragraphe 33, où l'on connaît deux points de la courbe : il faut trouver d'abord le point d'application de la poussée et cette poussée elle même ; ce qui se fait par les formules :

$$(4) \qquad Q = \frac{aP + cT - (a'P' + c'T')}{e}.$$

$$(5) \qquad q = h - \frac{aP + cT}{Q}.$$

Les données relatives au point supérieur du troisième joint sont : $g' = 1,88$; $h' = 0,60$; $P' = 1,69$; $p' = 1,21$ (col. 8 et 10 du premier tableau) ; $T' = 0,20$; $t' = 0,36$ (col. 10 et 12 du deuxième tableau). D'où :

$$a' = g' - p' = 0,67 \; ; \; c' = h' - t' = 0,24 \; ; \; e = h - h' = 2,70.$$

$$Q = \frac{0,85 \times 6,19 + 1,26 \times 3,40 - (0,67 \times 1,69 + 0,24 \times 0,20)}{2,7} = 3,09.$$

$$q = 3,30 - \frac{0,85 \times 6,19 + 1,26 \times 3,40}{Q} = 0,21.$$

Au moyen de ces quantités on construira cette deuxième courbe comme on a construit la première. Seulement la résultante *rs* des forces verticale et horizontale *ru, us,* ne sera plus comptée comme auparavant de *v* à *w,* mais du point *o* de rencontre avec l'horizontale CD au point *s*. Cette différence provient de ce que le point d'application de la poussée n'est plus au point le plus haut A, mais sur l'horizontale CD, à $0^m,21$ au-dessous de A. L'intersection de la ligne *os'* avec la nouvelle poussée $Q = s'x'$ donnera la nouvelle résultante *ox'* qui, prolongée au-dessous du point *o,* coupe le quatrième joint en *y',* point cherché de la courbe des pressions.

Cette nouvelle courbe touche l'intrados au joint de culée et l'extrados au troisième joint, mais elle traverse l'intrados entre le pre-

ier et le deuxième joint et sort ensuite de la voûte. D'où il résulte e l'arc n'est pas stable et se détruira par la chute des reins en dans, le sommet étant chassé vers le haut.

Quoiqu'on donne dans la pratique une épaisseur de voûte beaup plus grande que dans le cas précédent, cet exemple montre e la courbe des pressions s'approche beaucoup de l'extrados, ce donne lieu de craindre un renversement à la moindre perturion.

36. Quatrième exemple. Construction d'un souterrain upportant un massif de terre et dont la courbe moyenne oit une courbe des pression possibles.

a courbe des pressions trouvée dans l'exemple du tunnel sous la nise (§ 34) ressemble beaucoup à un arc d'ellipse qui aurait pour ni-grand axe les deux tiers de la hauteur de la voûte et son centre tiers de cette hauteur à partir du radier. On peut, dès lors, adttre qu'un tunnel qui serait établi suivant un profil elliptique nblable à celui-là satisferait aux conditions de stabilité; en effet, courbe moyenne serait une courbe des pressions possible; d'où suit que sa véritable courbe des pressions tomberait toujours ns l'épaisseur de la voûte, et que le tunnel aurait un grand excès stabilité.

Soit à projeter un tunnel ayant une hauteur libre $cd = 5^m,97$;. XIV, à la fin du volume), et une largeur libre de $3^m,77$, tant dans bas qu'à une hauteur $ca = 3^m,86$ au-dessus du radier, de sorte qu'en t en a la demi-largeur sera $af = bg = 1^m,88$. Prenons en outre ur la flèche du radier $bc = 0^m,41$. Il en résulte que la distance ab tre les deux ordonnées égales af, bg sera de $3^m,45$: le milieu e cette distance est le centre de l'ellipse. Le demi-grand axe de ntrados sera $ed = ea + ad = 1,73 + (5,97 - 3,86) = 3,84$. Le mi-petit axe s'en déduit au moyen de l'équation de l'ellipse :

$$b = \frac{ay}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

n a ici

$$a = ed = 3,84 ; \; y = af = bg = 1,88 ; \; x = ea = eb = 1,73.$$

D'où

$$b = en = \frac{3,84 \times 1,88}{\sqrt{(3,84)^2 - (1,75)^2}} = 2,13.$$

Si l'on donne au tunnel $0^m,94$ d'épaisseur, le demi-grand axe de la courbe moyenne aura $4^m,31$ et le demi-petit axe $2^m,60$.

Admettons que la charge de terre sur le tunnel soit arasée horizontalement à $15^m,70$ au-dessus du sommet de l'extrados, et que le poids spécifique de cette terre soit moitié de celui des voussoirs : on comptera ainsi la hauteur de charge pour moitié seulement, comme au paragraphe 34 ; la limite de la surcharge réduite sera *ors*.

On partagera la voûte et sa surcharge, savoir : au-dessus du petit axe de l'ellipse en sept parties ayant pour largeurs respectives 0,63; 0,63; 0,63 ; 0,25 ; 0,31 ; 0,31 ; 0,31, et au-dessous du petit axe, jusqu'au radier, en deux parties ayant pour largeur l'épaisseur même de la voûte et pour hauteur moyenne respectivement $0^m,94$ et $1^m,13$.

On formera ainsi les deux tableaux qui suivent :

POIDS ÉLÉMENTAIRES.						SOMMES PARTIELLES.			
Numéros.	Largeur	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Surface.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m q.	m.	m. c.		m q	m. c.	m.
1	0,63	8,79	5,54	0,31	1,72	1	5,54	1,72	0,31
2	0,63	9.01	5,68	0,94	5,34	1 + 2	11,22	7,06	0,62
3	0,63	9,77	6,16	1,57	9,67	1 + ... 3	17,38	16,73	0,95
4	0,25	10,83	2,71	2,01	5,45	1 + ... 4	20,09	22,18	1,11
5	0,31	11,84	3,67	2,29	8,40	1 + ... 5	23,76	30,58	1,29
6	0,31	11,52	3,57	2,61	9,32	1 + ... 6	27,33	39,90	1,47
7	0,31	10,96	3,40	2,92	9,93	1 + ... 7	30,73	49,83	1,63
8	0,94	0,94	0,88	2,57	2,26	1 + ... 8	31,61	52,09	1,65
9	0,94	1,13	1,06	2,50	2,65	1 + ... 9	32,67	54,74	1,69
			32,67		54,74				

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES.								SOMMES PARTIELLES.			
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge	Produit.	f	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	m.	m.	m. q.	$\frac{1}{3}$	m.q.	m	m.c.		m.q.	m c	m
1	0,094	7,85	0,77		0,25	0,05	0,01	1	0,25	0,01	0,05
2	0,31	7,98	2,44		0,82	0,25	0,20	1 + 2	1,07	0,21	0,2
3	0,66	8.26	5,45		1,82	0,74	1,35	1 + ... 3	2,89	1,56	0,53
4	0,38	8.51	3,33		1,11	1,26	1,40	1 + ... 4	4,00	2,96	0,72
5	0,60	8,79	5,27		1,76	1,74	3,04	1 + ... 5	5,76	6,00	1,04
6	0,78	9,17	7,15		2,38	2,43	5,78	1 + ... 6	8,14	11,78	1,44
7	1,95	10,02	19,54		6,51	3,80	24,73	1 + ... 7	14,65	36,51	2,51
8	1,00	11.99	11.99		4,00	5.31	21.24	1 + ... 8	18,65	57,75	3,11
9	1,35	13,28	17,93		5,98	6.45	38,57	1 + ... 9	24,63	96,32	3,92
					24.63		96,32				

On veut que la courbe moyenne soit en même temps une courbe des pressions possible. Menons donc une courbe des pressions par le milieu du joint supérieur et le milieu du neuvième joint. On a :

$q = 0,47$; $g = 2,29$; $h = 6,75$; $a = g - p = 2,29 - 1,69 = 0,60$.
$c = h - t = 6,75 - 3,92 = 2,83$; $b = h - q = 6,75 - 0,47 = 6,28$.

D'où

$$Q = \frac{aP + cT}{b} = \frac{0.60 \times 32.67 + 2,83 \times 24,63}{6,28} = 14,1.$$

La courbe construite d'après ces éléments coïncide presque dans le haut avec la courbe moyenne tracée tout d'abord, dont elle ne s'écarte ensuite que très-peu. En prenant cette nouvelle courbe pour courbe moyenne on aura très-sensiblement, sans correction nouvelle, le profil type cherché : dans le cas actuel cette nouvelle courbe moyenne est une ellipse ayant pour demi-axes respectivement $4^m,40$ et $2^m,51$.

§ 36. *a.* Stabilité de la culée d'une voûte chargée verticalement et horizontalement.

Si l'on continue le tracé de la courbe des pressions à travers la culée jusqu'à la base de celle-ci, on connaîtra le degré de stabilité de cette partie de l'ouvrage.

Si l'on voulait appliquer des formules approchées à la détermination des épaisseurs et de la poussée Q, on pourrait calculer comme au numéro 22, par les formules qui s'y trouvent, le poids P et son moment M par rapport à la naissance de l'arc.

En ce qui concerne la poussée horizontale des terres, T, supposons l'angle de frottement égal à 30 degrés.

D'où

$$\text{Tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\text{Tang}^2\,30^\circ=\frac{1}{3},$$

On aura, en conservant la notation des paragraphes 22 et 23, pour la poussée exercée sur la voûte, depuis sa naissance jusqu'au sommet, sur la hauteur $b+c$ [1] :

$$(1)\quad T=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left[(b+c+h)^2-h^2\right]=\frac{1}{6}(b+c)(b+c+2h),$$

et pour son moment par rapport aux naissances :

$$(2)\quad N=\frac{1}{18}(b+c)^2(b+c+3h).$$

Au moyen de ces valeurs de M et N, l'équation (2) du paragraphe 33 donnera la poussée

$$(3)\quad Q=\frac{M+N}{b+c}.$$

La pression horizontale totale sur l'arc et sa culée, qui s'exerce sur la hauteur $g-h$, est [2] :

$$(4)\quad T_1=\frac{1}{6}(g^2-h^2)=\frac{1}{6}(f+b+c)(f+b+c+2h);$$

Son moment, par rapport à l'arête postérieure ou extérieure de la base de la culée

$$(5)\quad N_1=\frac{1}{18}(f+b+c)^2(f+b+c+3h).$$

Si maintenant on veut avoir un coefficient n de stabilité, on

[1] Comparez, ci-après, paragraphe 69.

[2] g est ici la hauteur totale de l'arc et de sa surcharge et de la culée comme au paragraphe 23, et non une abscisse horizontale comme aux paragraphes 24 à 36.

posera, pour déterminer l'épaisseur e de la culée, l'équation des moments suivante :

$$n(f+b+c)\,Q=\frac{1}{2}(e-\delta)^2(g-f)+\frac{1}{2}e^2f+e\,P+M+N_1;$$

ou bien :

$$(6)\ \frac{1}{2}e^2g+e\left[P-\delta(g-f)\right]=\left[n(f+b+c)\,Q-M-\frac{1}{2}\delta^2(g-f)-N_1\right]=o;$$

d'où :

$$(7)\ e=-\frac{P-\delta(g-f)}{g}+\frac{1}{g}\sqrt{\left[P-\delta(g-f)\right]^2+2g\left[n(f+b+c)\,Q-M-\frac{1}{2}\delta^2(g-f)-N_1\right]}$$

Dans le cas de culées très-élevées, si l'on craint que la poussée extérieure des terres n'entraîne la chute de la voûte par une rotation autour de l'arête intérieure de la base de la culée, on peut se rendre compte comme il suit de la stabilité par des formules approchées, si l'on n'aime mieux tracer graphiquemment la courbe des pressions jusqu'à cette base.

La force qui tend à la destruction du système est dans ce cas la poussée T_1, dont le moment est N_1, aussi bien par rapport à l'arête intérieure qu'à l'arête extérieure de la base de la culée. Si l'on exprime qu'il faut une force n fois plus grande pour amener le renversement en dedans, on a l'équation des moments :

$$(8)\qquad M+nN_1=\frac{1}{2}(e^2-\delta^2)(g-f)+\frac{1}{2}e^2f+(f+b+c)\,Q,$$

ou

$$\frac{1}{2}e^2g=M+nN_1-(f+b+c)\,Q+\frac{1}{2}\delta^2(g-f);$$

d'où l'on tire l'épaisseur de la culée :

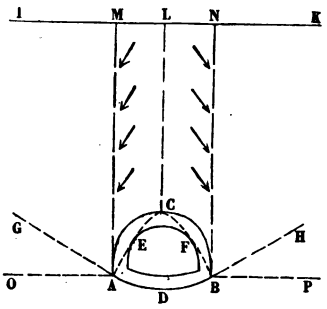
$$(9)\qquad e=\sqrt{\frac{2}{g}\left[M+nN_1-(f+b+c)\,Q+\frac{1}{2}\delta^2(g-f)\right]}.$$

§ 36. *b*. Tunnel en terrain mouvant.

Le terrain qui enveloppe un tunnel peut n'être pas fluide, c'est-à-dire ne pas transmettre les pressions a la manière des fluides qui donnent lieu à des sous-pressions de bas en haut. Si le terrain n'est

pas fluide, tout le massif GADBH (fig. 64), placé au-dessous de la limite formée par le talus naturel des terres des deux côtés de l'ouvrage, n'aura à résister qu'aux pressions verticales du massif supérieur. Dès lors le radier ADB du tunnel peut être considéré comme invariable, et il suffira de déterminer la courbe des pressions AECFB d'après les règles précédentes.

Fig. 64.



Dans l'application de ces règles il faudra toutefois remarquer que les pressions verticales et horizontales exercées sur la voûte ne sont pas, dans tous les cas, proportionnelles à l'enfoncement CL du tunnel au-dessous du sol naturel : cela n'a lieu que dans le cas où la masse AGIKHB tout entière a été déposée sur la voûte après sa construction, de manière à ne présenter aucune cohésion. C'est ce ce qui a lieu pour les remblais de chemins de fer déposés sur une voûte.

Lorsque, au contraire, le massif AIKB existe déjà avant la construction du tunnel, lequel vient ainsi le percer, ce massif n'entre tout entier dans la valeur de la pression que si sa hauteur est faible ; mais pour les grandes hauteurs la plus grande partie de la pression de la colonne verticale CL est supportée par le frottement des parois latérales AM et BN qui flanquent à droite et à gauche le massif superposé au tunnel.

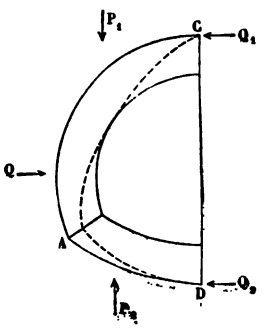
Je crois que dans les terrains de consistance moyenne la pression sur un tunnel de chemin de fer à deux voies ne dépasse jamais celle qui répondrait à une hauteur de 10 à 13 mètres. Pour un profil plus étroit la limite serait moins élevée, plus forte, au contraire, pour un profil plus large.

L'évaluation de la charge effective que supportera un tunnel est essentielle tant pour la détermination de l'intrados de la voûte que pour le calcul de son épaisseur. Quand les remblais sont déposés sur la voûte, il faut, comme on vient de le dire, faire entrer en ligne de compte toute la hauteur du massif : il n'y a d'exception que pour les petites voûtes ou les aqueducs dallés sous hauts remblais, pour lesquels on peut, sans danger, réduire un peu la hauteur : les premières charges que l'ouvrage a à supporter produisent sur lui un

petit affaissement, d'où il suit que la charge du massif superposé se répartit partiellement sur les côtés, comme dans le cas du tunnel. Mais le coefficient de réduction à appliquer ne peut se calculer théoriquement ; il faut s'en tenir aux expériences pratiques.

Tout ce qui précède se rapporte au cas où le terrain est un bon terrain, non fluide ni mouvant. S'il n'en est pas de même, on doit apporter d'autant moins de réduction à la hauteur de pression effective que la consistance du sol se rapproche davantage de l'état fluide. En outre, on doit alors remarquer qu'il existera, ou du moins qu'on devra admettre des sous-pressions exercées sur le radier ADB (fig. 65), ces sous-pressions ayant une intensité en rapport avec le degré de fluidité du sol ; d'où résulte ce fait important qu'aucun point des culées ne peut être considéré comme invariable. On ne peut donc plus se contenter de tracer la courbe des pressions du sommet C au point A : on devra la continuer au travers du radier et la déterminer d'après la condition que les deux pressions horizontales Q_1, Q_2 aux clefs supérieure et inférieure soient les composantes de la résultante horizontale Q des pressions qu'exerce le terrain sur cette moitié du tunnel.

Fig. 65.



Le problème est ainsi déterminé si la masse enveloppante est parfaitement fluide : dans ce cas Q est connu et les deux composantes Q_1, Q_2 ne peuvent varier qu'entre d'étroites limites.

Mais si le massif n'a qu'une fluidité imparfaite, Q n'a plus une valeur déterminée ; on peut seulement lui assigner des limites. Dans ce cas les limites imposées aux variations de Q_1 et Q_2 s'écartent naturellement à raison de l'éloignement de limites données à Q. Les composantes Q_1, Q_2 demeurent d'ailleurs assujetties au principe de la moindre résistance, et doivent ainsi être le plus petites possible.

On voit que, dans le cas de fluidité parfaite du milieu, la poussée Q_1 n'est pas déterminée par le profil de la voûte, mais par la poussée hydrostatique extérieure, dont l'influence est alors dominante. L'influence du profil augmente à mesure que la fluidité diminue, et entre seule en considération quand la cohésion du sol devient suffisante : alors c'est la forme adoptée qui détermine Q_1 et, par suite,

la poussée extérieure Q qui ne joue plus que le rôle de résistance passive du milieu ambiant.

SECTION C.

ÉQUILIBRE DE GLISSEMENT.

§ 37. Conditions génerales de l'équilibre de glissement.

Soit KG (fig. 66) la courbe des pressions véritable correspondant à l'équilibre de rotation ; si la résultante des pressions fait en chaque point N avec la normale au joint correspondant un angle INH, plus petit que l'angle du frottement correspondant à la nature des voussoirs, la voûte est assurée contre tout glissement des voussoirs sur les surfaces des joints. Si, au contraire, sur certains joints, cet angle est plus grand que l'angle du frottement, la ligne KNG ne peut être la vraie courbe des pressions, et la valeur de Q déterminée uniquement en vue de la rotation n'est pas la poussée effective. Mais cette valeur trouvée pour Q a été prise minimum ; la poussée vraie ne peut donc être moindre. Si donc l'équilibre de glissement exigeait une valeur de Q inférieure à celle-là, comme l'indique la figure 67, la stabilité de l'arc serait impossible, et l'arc se détruirait comme l'indique la figure 68.

Fig 66.

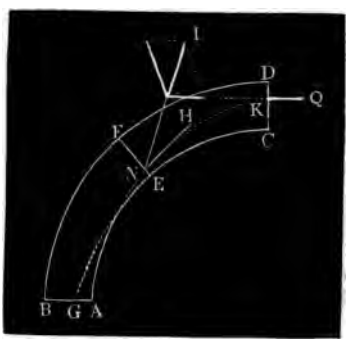
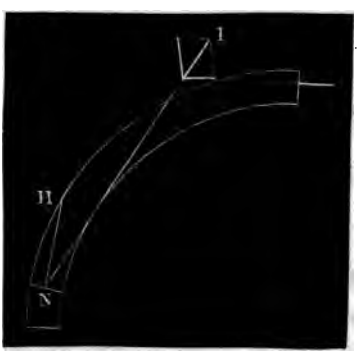


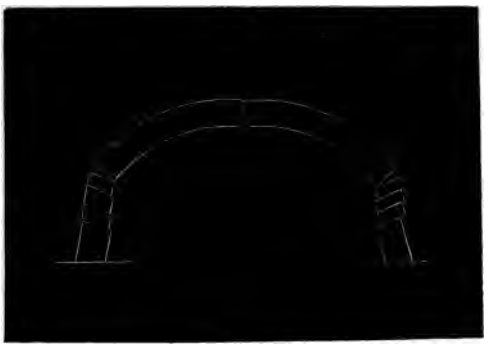
Fig. 67.



Si, au contraire, comme l'indique la figure 66, il faut augmenter la première valeur de Q, cette condition peut fort bien être remplie. On reconnaîtra facilement le joint le plus exposé et on augmentera Q de manière qu'aucun angle INH ne dépasse l'angle de frottement.

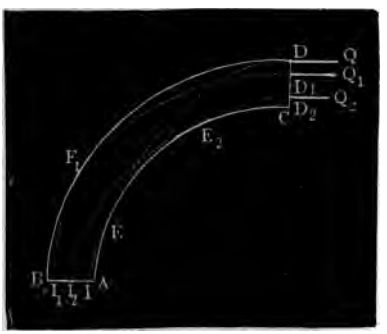
On obtient ainsi la valeur minimum de Q exigée par l'équilibre e glissement. Cette valeur est, comme nous l'avons vu, supérieure u minimum qui ré- ond à l'équilibre de ro- ation. Nous avons vu u'à ce dernier mini- num répondait une ourbe des pressions nique. A une valeur lus grande de Q va cor- espondre un nombre nfini de courbes de pres- ion qui pourront tenir ntièrement entre les ourbes-contours, et qui, satisfaisant toutes avec la moindre valeur ossible de Q aux conditions d'équilibre tant de rotation que de lissement, peuvent également prétendre à la réalité.

Fig. 68.



Soit, par exemple, DEI (fig. 69) la courbe des pressions répondant u minimum de Q pour la rotation ; supposons que le minimum de Q our le glissement, que nous désignerons par Q_1, soit tellement rand que l'on ne puisse faire passer aucune courbe des pressions ossible par le point supérieur D de la clef en adoptant la poussée Q_1 ; il y aura alors une courbe les pressions construite avec Q_1, elle que $D_1F_1I_1$, qui passera par n point D intermédiaire sur le oint supérieur et qui touchera 'extrados en F_1 ou le rencontrera n B ; il y en aura une autre, elle que $D_2E_2I_2$, partant d'un point ncore plus bas D_2, qui touchera 'intrados en E_2 ou le coupera n A. (Il pourrait arriver d'ail- eurs que D_1 coïncidât avec D, ou D_2 avec C, la courbe des pressions correspondante ne touchant, ni ne coupant la courbe-contour, mais demeurant dans l'intérieur de a voûte.)

Fig. 69.



Entre ces deux courbes, on en peut concevoir une infinité d'autres, outes possibles, construites avec Q_1 et partant des points situés

entre D_1 et D_2. On voit donc que la question de l'équilibre est indéterminée dans ces conditions. Cette indétermination toutefois ne porte que sur le point d'application de la poussée ou le point de départ de la courbe des pressions et non sur la grandeur de cette poussée, laquelle est parfaitement déterminée.

Cette indétermination est analogue à celle qui se produit dans le cas simple d'un corps unique en forme de coin, reposant sur deux plans inclinés.

Si la culée est tellement construite que ses parties puissent tourner ou se déplacer, de sorte qu'elle doive être considérée comme la continuation de la voûte proprement dite, et si l'on donne à cette culée l'épaisseur répondant à un minimum de stabilité, la courbe inférieure $D_2 E_2 I_2$ sera la seule courbe des pressions possible.

§ 38. Mode de rupture quand l'équilibre n'est pas assuré à la fois contre la rotation et contre le glissement.

On a vu dans le paragraphe précédent que l'arc est instable et se renverse comme la figure 70, quand l'équilibre de glissement exige une poussée moindre que le minimum exigé pour l'équilibre de rotation.

Fig. 70.

Il se présente un autre cas d'instabilité quand le minimum Q_1, résultant des considérations du précédent paragraphe, nécessaire pour l'équilibre de glissement, se trouve plus grand que le maximum antérieurement trouvé des poussées qui peuvent se produire dans la voûte. La voûte se brisera alors, comme figure 71, par le glissement relatif de tous les voussoirs pour lesquels, en traçant la courbe au maximum de Q, on trouverait l'angle INH plus grand que l'angle du frottement. Cette rupture est accompagnée d'un mouve-

e bas en haut du sommet de la voûte, qui se meut ainsi tout
ièce dans chaque demi-voûte.

leux cas d'in-
ś par glisse-
n dedans et
ors peuvent
enter simul-
nt (fig. 72 ou

ıt aussi arri-
ns certaines
tances qu'un
détruise par
rs glisse-
alternatifs en
et en dehors :
aura lieu si
INH a plu-
naximums en
nts différents
oûte.
ıt arriver en-
il y ait à la
stabilité par
au glisse-
par rapport
tation. Dans
dans la rup-
la voûte, les
ont le double
nent de glis-
sur les joints
tation autour

Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 73.

ines arêtes : ce mouvement composé est facile à comprendre
détails dans lesquels nous sommes entrés antérieurement.

§ 39. Tracé des joints qui rend la tendance au glissement uniforme pour tous les joints ou qui l'annule.

Dans notre étude de l'équilibre d'une voûte contre la rotation, nous avons vu qu'on n'a pas la faculté de disposer de la forme de la voûte ou de la direction des joints, de manière que la vraie courbe des pressions soit partout à égale distance de l'intrados et de l'extrados, ni qu'elle soit à une distance constante, soit de l'intrados, soit de l'extrados. En effet, en supposant la matière parfaitement incompressible, la vraie courbe des pressions doit avoir un point commun avec chacune des courbes-contours. Donc, en ce qui concerne la rotation, une voûte ne présente jamais en tous ses points un égal degré de stabilité; elle a des parties fortes et des parties faibles. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible de disposer la voûte, en ce qui concerne l'équilibre de glissement, de telle sorte que les directions des résultantes partielles fassent avec les normales aux joints correspondants des angles égaux, ce qui donnerait un effort de glissement constant.

Ce dernier point est très-facile à réaliser. On peut même donner aux joints une direction telle que la direction IN leur soit respectivement normale : ce qui annulera la tendance au glissement. Quoiqu'un tel tracé des joints ait une raison d'être théorique, on s'en soucie peu dans l'application, parce que ces joints ne remplissent plus la condition d'être normaux à l'intrados, condition indifférente à la stabilité mais importante au point de vue de l'exécution ou de l'ornementation.

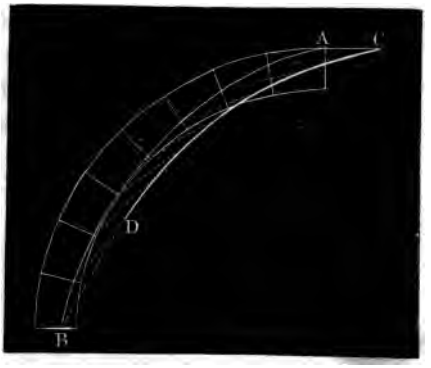
§ 40. Courbe-enveloppe des pressions.

De même que la courbe des pressions est propre à représenter la stabilité contre la rotation aux différents points d'une voûte, de même on peut construire une autre courbe liée à la première et mettant en relief la stabilité contre le glissement.

Soit AB (fig. 74) la courbe des pressions. Elle coupe chaque joint

au point d'application de la force qui agit sur ce joint. Si l'on prolonge les directions de toutes ces forces, on obtiendra leur courbe-enveloppe, qui servira à indiquer la direction des pressions.

Fig. 74



Pour avoir la direction de la pression en un point quelconque I de la courbe des pressions, il n'y a qu'à mener de ce point une tangente IJ à la courbe-enveloppe que nous venons de construire.

§ 40. *a*. Stabilité des ponts existants au point de vue du glissement.

Soit (fig. 75) :

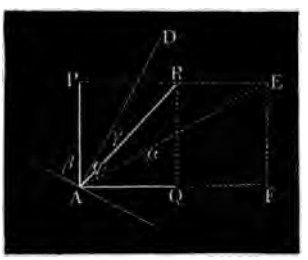
P, la pression verticale de la voûte sur le joint de culée BC, c'est-à-dire le poids de la demi-voûte accru de sa surcharge ;

Q, la poussée horizontale ;

α, l'angle RAQ de la résultante de P et Q avec l'horizontale ;

β, l'angle BAP du joint de culée avec la verticale ;

Fig. 75.



γ, l'angle RAD de la résultante de P et Q avec la normale AD au joint de culée, angle positif ou négatif, suivant que AR est au-dessous ou au-dessus de la normale AD ;

α', l'angle de la verticale avec la pression résultante exercée sur la section horizontale de la culée qui passe par les naissances ;

e, l'épaisseur de la culée ;

f, la hauteur de la culée au-dessous des naissances ;

g, la hauteur totale de la culée depuis sa base jusqu'au sommet de la surcharge ;

φ, l'angle de frottement pour la matière des voussoirs ;

ψ, l'angle de frottement pour les matériaux le moins bien mis en œuvre de la culée ;

m, le coefficient de stabilité contre le glissement, c'est-à-dire le facteur par lequel il faut multiplier la poussée Q pour amener un glissement de la culée sur une section horizontale.

Pour le reste, nous conservons les notations du paragraphe 22.

L'angle du frottement φ est compris, pour les voussoirs équarris, entre le minimum $\varphi = 31°$, tang $\varphi = 0,60$, et le maximum $\varphi = 37°$, tang $\varphi = 0,75$.

Quand le mortier est frais, cet angle peut diminuer jusqu'à $\varphi = 27°$, tang $\varphi = 0,50$.

En général, on prend $\varphi = 35°$, tang $\varphi = 0,70$.

D'après la notation ci-dessus, on a :

$$(1) \quad \text{Tang } \alpha = \frac{P}{Q} \text{ et } \gamma = \beta - \alpha.$$

Si l'on calcule les valeurs de α et γ d'après ces formules, on obtient les valeurs inscrites dans la table n° 1 du paragraphe 22 pour plusieurs ponts existants. On trouve ainsi que dans le pont de Neuilly l'angle γ atteint $29° + 6'$, et même au pont sur la Severn $30° + 39'$, presque l'angle du frottement. Cette circonstance indique une faible stabilité contre le glissement ; mais il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit seulement ici de la stabilité de la voûte proprement dite sur le joint de culée, et qu'en ce point particulier la stabilité contre la rotation est tout aussi faible et même n'existe pas du tout dans certains ponts exécutés : ce qu'il est difficile de ne pas considérer comme un défaut véritable.

Si l'on considère la stabilité contre le glissement pour la voûte avec ses tympans ou pour la culée, on peut admettre comme angle de frottement des maçonneries brutes posées en liaison : $\psi = 45°$, tang. $\psi = 1$.

La section la plus faible en ce qui nous occupe est évidemment la section de la culée qui passe par les naissances, car, dans toutes les sections inférieures, la force verticale augmente en faveur de la stabilité, tandis que la poussée horizontale ne change pas.

Pour cette section, la pression verticale est $P + (e - \delta)(b + c + h)$, et la poussée est Q.

D'où :

$$(2) \quad \text{Tang } \alpha' = \frac{Q}{P + (e - \delta)(b + c + h)}.$$

et, puisque la poussée mQ doit rendre $\alpha' = \psi = 45°$, on a :

$$(3) \quad \frac{mQ}{P + (e - \delta)(b + c + h)} = \text{tang } \psi = 1 ;$$

d'où :

$$(4) \quad m = \frac{P + (e - \delta)(b + c + h)}{Q}.$$

La première table du paragraphe 22 nous montre que le coefficient de stabilité de glissement, m, est dans la pratique presque toujours beaucoup plus grand que le coefficient n de stabilité contre la rotation. Dans plusieurs cas, il est vrai, m descend jusqu'à n, quelquefois même un peu au-dessous; mais on reconnaît que là où la culée est construite suivant la prescription du paragraphe 23, de manière que n soit entre 2 et 3, m se tient aussi entre ces limites, de sorte qu'il n'est pas, en général, nécessaire de contrôler et de corriger, en ce qui concerne le glissement, les dimensions d'une culée suffisamment stable contre la rotation.

Si l'on veut cependant exercer ce contrôle au moyen d'une formule approchée, on calculera l'épaisseur de la culée par la formule :

$$(5) \quad e = \frac{mQ - P}{b + c + h} + \delta,$$

dans laquelle on donnera à m la valeur que nous avons indiquée pour n au paragraphe 23.

Il est bien entendu que la poussée Q doit être déterminée, non-seulement d'après les forces verticales, mais aussi d'après les forces horizontales quand elles existent; on emploiera les formules des paragraphes 22 et 36.

Pour les culées élevées et remplies de terre, on peut craindre que la poussée extérieure des terres ne renverse la voûte, ce qui peut avoir lieu par glissement aussi bien que par rotation. On aura là-dessus pleine lumière en cherchant la courbe et l'enveloppe des pressions jusqu'à la base de la culée, et tenant compte de toutes les forces intérieures et extérieures du système. Si l'on veut des formules approchées pour vérifier la stabilité de la voûte sous différents points de vue, on peut introduire de la manière suivante dans le calcul l'action des forces extérieures de la poussée des terres.

Le poids total de la demi-voûte et de sa culée est :

$$P + e(b + c + h + f) - \delta(b + c + h).$$

Si l'on prend l'angle du frottement [illegible] derrière la

culée égal à 30°, la poussée des terres contre le corps du pont est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(g^2 - h^2) = \frac{1}{6}(g^2 - h^2).$$

Donc la force horizontale tendant à faire glisser la culée sur sa base de dehors en dedans est :

$$\frac{1}{6}(g^2 - h^2) - Q.$$

Par conséquent, la tangente de l'angle que fait la pression résultante sur la base de la culée avec la verticale est :

$$\frac{\frac{1}{6}(g^2 - h^2) - Q}{P + e(b + c + h + f) - \delta(b + c + h)}.$$

Veut-on maintenant qu'il faille m fois la force nuisible $\frac{1}{6}(g^2 - h^2)$ pour produire le glissement? On égalera la tangente ci-dessus à tang $\psi = 1$, d'où l'on tirera pour épaisseur suffisante de la culée :

$$(6) \quad e = \frac{\frac{1}{6} m (g^2 - h^2) + \delta(b + c + h) - (P + Q)}{b + c + h + f}.$$

La poussée Q devra être déterminée en tenant compte de la poussée des terres, comme aux paragraphes 33 et 36 *a*.

Quant à la stabilité contre le renversement sous l'action d'une trop forte poussée des terres agissant par rotation, nous en avons traité en détail au paragraphe 36 *a*.

CHAPITRE II.

VOUTES A MOITIÉS DYSSYMÉTRIQUES OU A CHARGES DYSSYMÉTRIQUES.

SECTION A.

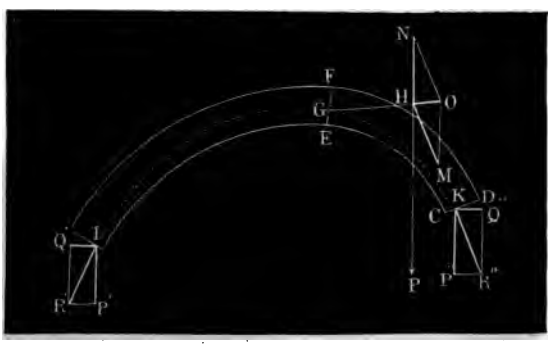
ÉQUILIBRE DE ROTATION.

§ 41. Généralités pour le cas de charges verticales.

Nous devons maintenant étendre les considérations qui précèdent sur la stabilité des voûtes au cas plus général où la voûte n'est plus formée, des deux côtés de la clef, de deux demi-voûtes symétriquement chargées et concourant au joint du sommet.

Le défaut de symétrie peut tenir à ce que les profils des deux demi-voûtes sont différents, ou à ce que la charge n'est pas distribuée symétriquement des deux côtés du sommet; dans les deux cas, il n'y a pas de demi-voûtes séparées par un joint vertical au sommet comme dans les arcs précédemment considérés.

Fig 76.



Soient AB, CD (fig. 76) les deux surfaces fixes des culées sur lesquelles s'appuie un arc ABDC; I,K les points d'application des réactions $R'I = R'$, $R''K = R''$ de ces surfaces fixes; Q',Q'' les composantes horizontales, P',P'' les composantes verticales des forces R',R''; soit enfin P le poids de l'arc entier ABDC avec sa surcharge.

Quelles que soient les forces R′,R″ en grandeur et en direction et quels que soient leurs points d'application, on a :

$$Q' = Q'' \text{ et } P' + P'' = P.$$

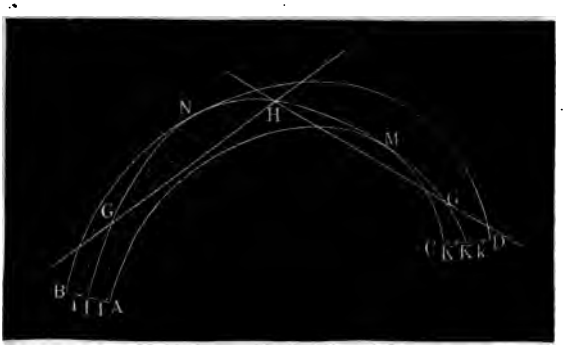
A ces deux premières conditions, le principe de la moindre résistance en joint une troisième, à savoir que les composantes horizontales Q′,Q″ doivent être les plus petites possibles.

§ 42. Les courbes des pressions et leurs propriétés générales.

Soit IGK la courbe des pressions, c'est-à-dire, d'après les définitions antérieures, le lieu des points d'application sur les joints successifs des pressions agissant sur ces mêmes joints. Si, par exemple, on suppose donnés le point d'application, la direction et la grandeur de la force R″K = R″, on aura le point G de la courbe sur un joint quelconque EF en composant la force R″ avec le poids P de la portion de voûte CDEF avec sa surcharge, et prenant l'intersection de EF avec la résultante de ces deux forces : construction purement géométrique.

Soit KMI (fig. 77) une courbe des pressions quelconque partant du point K sur la culée CD et répondant à une pression en ce point exprimée en grandeur par R, en direction par RK. Comparons à cette première courbe une seconde K′M′I′ partant de CD au point K′, à laquelle correspond une réaction R′ dirigée suivant R′K′.

Fig. 77.



Soit maintenant R″ une force de direction R″K″, qui en se composant avec R donnerait pour résultante R′. On veut avoir un point

quelconque M′ de la courbe K′M′I′, ayant déjà la force appliquée en M (point du joint MM′ qui appartient à la courbe KMI); comme la force en M est la résultante de R et du poids P, il suffira de composer de nouveau cette résultante avec R″, ce qui donnera la force en M′, résultante de P et R′ : l'intersection de cette force avec MM′ sera le point M′.

Mais on voit facilement que si la ligne R″K″, indéfiniment prolongée, coupe la courbe KMI en un certain nombre de points G,H, etc., ou ne la coupe pas du tout, la courbe K′M′I′ coupera la première aux mêmes points G,H, etc., et nulle part ailleurs, ou ne la coupera pas du tout. On voit encore que si le point de départ K′ est entre K et K″, K′M′I′ sera toujours entre KMI et la droite K″L; ou inversement si K est entre K′ et K″, KMI sera partout entre K′M′I′ et K″L. Enfin, si K″ est entre K et K′, la droite K″L sera partout entre les deux courbes.

D'où il résulte que les deux courbes ne peuvent avoir d'autres points de contact que ceux de KMI et de la droite K″L.

Cette relation générale entre les positions de deux courbes des pressions comprend comme cas particuliers, ainsi qu'on le voit aisément, diverses propriétés spéciales au cas des voûtes à formes et charges symétriques, cas où en passant d'une courbe à l'autre la poussée ou réaction au sommet varie en grandeur et en position, tandis qu'ici la réaction de la culée varie en grandeur, en position et en direction.

Si, par exemple, on conserve ici à la force R un même point d'application K et une même direction RK, en en portant seulement la grandeur de R à R′, la direction R″L coïncidera avec RK. La nouvelle courbe KI′, partant aussi de K, coupera la précédente précisément aux points où celle-ci rencontre la droite RK.

Si, en conservant à R sa grandeur et sa direction, on fait mouvoir son point d'application sur CD, comme alors R″ sera nul, mais aura son point d'application à l'infini sur CD et sa direction parallèle à RK, la droite R″L ne rencontrera pas KMI; donc aucune courbe trouvée K′M′I′ ne rencontrera non plus KMI, mais chacune restera d'un même côté de KMI.

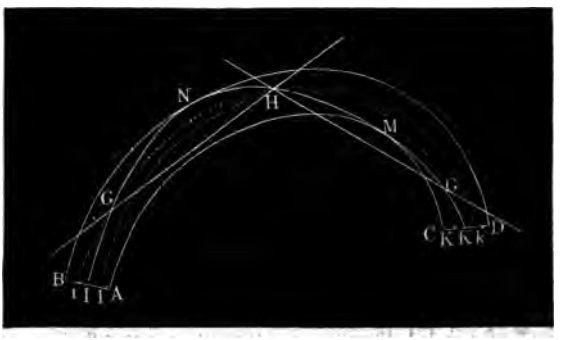
Ces propriétés répondent exactement à celles que nous avons rencontrées dans le cas où les forces R,R′,R″ étaient nécessairement horizontales. Du théorème général qui précède, on en tirerait facilement d'autres intéressants. Nous nous bornerons cependant à

établir une seule propriété qui nous servira à simplifier les recherches ultérieures.

§ 43 Autres propriétés générales des courbes des pressions.

Soient RK, R'K' (fig. 78), les directions positives de deux réactions possibles R,R' de la surface fixe CD; il est évident que ces lignes seront à droite du joint CD si les courbes des pressions correspondantes, KMI, K'M'I' sont situées à gauche et s'élèvent de droite à gauche. Au contraire, la direction positive R''K'' de la force R'' peut être à droite ou à gauche de CD, et dans tous les quadrants. Mais comme R' est la résultante de R et R'', le point d'application K'' de R'' ne pourra jamais, dans le cas qui nous occupe, tomber entre K et K'.

Fig. 78.



De là et d'un examen plus complet des relations géométriques possibles dans la figure ci-dessus, on conclut ce qui suit : Admettons que K''L représente le prolongement de la direction R''K'' du côté positif de la force R'', et regardons comme positive la direction de la courbe KMI de K vers I, et de K'M'I' de K' vers I' : cela posé, la direction positive de K'M'I', comptée à partir d'un point de rencontre quelconque tel que G, ou, s'il n'y a pas rencontre, à partir d'un joint quelconque tel que CD, se trouve toujours comprise entre la direction positive de KMI et la direction positive K''L de la force R''. Ce qui peut s'exprimer plus nettement de la manière suivante : à partir d'un joint quelconque, la direction positive d'une courbe KMI correspondante à la résistance R tombe entre la direction positive de la courbe répondant à une résistance R', résultante de R et R'', et la direction négative LK'' de la force R''.

Si la direction positive R″K″ de la force R″ s'incline du côté droit de la verticale, elle a une composante horizontale dont la direction positive va de droite à gauche ; dès lors, la composante horizontale de R′ est plus grande que celle de R ; en d'autres termes, la courbe des pressions K′M′I′ répond alors à une poussée horizontale plus grande que KMI. Si, au contraire, la direction positive R″K″ de la force R″ penche du côté gauche de la verticale, la courbe K′M′I′ répond à une poussée horizontale moindre que KMI.

On tire de ce qui précède une proposition importante. Soit K″L le sens de la droite indéfinie R″K″ qui va de droite à gauche : et ici nous ne nous inquiétons ni de son inclinaison sur l'horizon, ni de savoir si cette direction est la direction primitive ou la négative de la force R″ ; considérons de même les courbes KMI, K′M′I′, dans leur direction de droite à gauche. Cela posé, à partir d'un point de rencontre ou d'un joint quelconque, celle des deux courbes qui répond à la plus grande poussée horizontale est toujours située entre l'autre courbe et la droite K″L. Si les deux courbes répondent à une même poussée horizontale, la force R″ est nécessairement verticale, et l'impossibilité où l'on se trouve alors de décider si la direction K″L à considérer est celle de bas en haut ou de haut en bas est l'expression géométrique de ce fait, qu'aucune de ces deux courbes n'a une pression supérieure à l'autre.

§ 44. Condition commune aux courbes des pressions qui répondent à un minimum ou à un maximum de la poussée horizontale.

Nous ferons un pas de plus vers la détermination des courbes des pressions répondant à un minimum et à un maximum de la poussée, en remarquant qu'une telle courbe ne peut traverser moins de deux fois l'épaisseur entière de la voûte, sans sortir de la voûte, bien entendu.

Admettons en effet que la courbe des pressions KMNI ne traverse la voûte qu'une fois, entre M et N, ou qu'elle ne la traverse pas du tout. Soit GH une droite qui réunit un point G de la portion de courbe KM à un point H de la portion MN. Composons la force R (fig. 78 et 79) agissant en K avec une force R″ supposée agir suivant GH : on pourra toujours, soit que R″ agisse suivant GH ou

suivant HG, tracer une nouvelle courbe des pressions K'GHI', restant tout entière dans l'intérieur de la voûte, et laissant cependant la courbe KGHI entre la nouvelle et la droite GH. Il est donc possible de construire une courbe des pressions avec une moindre poussée horizontale.

Fig. 79.

De même, si l'on trace la droite H*g* qui relie un point H de la portion de courbe MN à un point *g* de la portion de courbe NI, on voit qu'il est possible de tracer une nouvelle courbe *k'*H*gi'* restant tout entière dans l'intérieur de la voûte, et tombant entre l'autre courbe KH*g*I et la droite H*g*, en sorte qu'elle répondra à une poussée horizontale plus grande. D'où il suit que la poussée horizontale d'une courbe des pressions qui traverse moins de deux fois la voûte ne peut être ni un minimum ni un maximum.

La condition que la courbe cherchée fasse au moins deux traversées complètes de l'une à l'autre des courbes-contours de la voûte entraîne cette autre condition, qu'elle ait avec les courbes-contours au moins trois points communs, savoir : deux points communs avec l'une, et le troisième, intermédiaire aux deux premiers, avec l'autre courbe-contour. Cela ne veut pas dire qu'il doit y avoir contact en ces trois points ; un ou deux de ces points communs peuvent se trouver sur les joints de culée AB, CD, et alors un contact entre la courbe cherchée et la courbe-contour n'est nullement nécessaire.

La condition de trois points communs avec les courbes-contours restreint le nombre infini des courbes des pressions possibles à un nombre limité, et généralement à une seule courbe, comme on le reconnaîtra, si l'on se rappelle qu'on ne peut disposer, pour construire une telle courbe, que de trois éléments : la grandeur, la direction, le point d'application de la réaction R qui s'exerce sur la surface de culée CD.

La condition d'une double traversée de voûte peut être remplie de deux manières : ou la courbe des pressions dont il s'agit a deux points communs avec l'intrados et dans l'intervalle un point com-

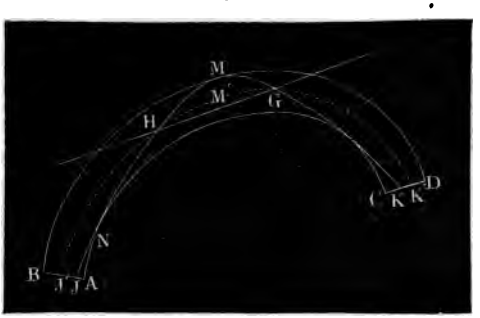
mun avec l'extrados, ou bien elle a deux points communs avec l'extrados et dans l'intervalle un point commun avec l'intrados.

§ 45. Premier cas qui offre un caractère distinctif du minimum de la poussée horizontale.

Soit la courbe des pressions KLMNI (fig. 80), qui a deux points L, N, communs avec l'intrados, et un point intermédiaire M commun avec l'extrados. (Ce cas comprend celui où l'un ou l'autre des points L, N, ou tous les deux tomberaient sur les points extrêmes C, A de l'intrados sur les joints de culée, sans qu'il y eût contact entre les deux courbes). Dans ce cas, la courbe répond toujours à un minimum de la poussée.

En effet, il est clair tout d'abord que toute autre courbe possible K'M'I', c'est-à-dire demeurant dans l'intérieur de la voûte, coupera chacune des deux portions de courbe LM, MN, en un, ou, en général, en un nombre impair de points, comme G, H ; que tous ces points et les autres points d'intersection des deux courbes, s'il en existe d'autres, doivent se trouver sur une même ligne droite ; enfin que la résistance R' de la surface de culée CD se compose, pour la deuxième courbe K'M'I', de la résistance R afférente à KMI, et d'une force R'' agissant suivant la droite GH. Il est clair que le point M sera d'un côté de cette droite, les points L, N de l'autre côté. Il est encore facile de voir que, quelle que soit la forme de la courbe KMI, l'arc GMH, dans le voisinage du point M, sera entre la droite GH et l'extrados, et les arcs KLG, HNI, dans le voisinage de leurs points respectifs L, N, seront entre l'intrados et la droite GH.

Fig 80.



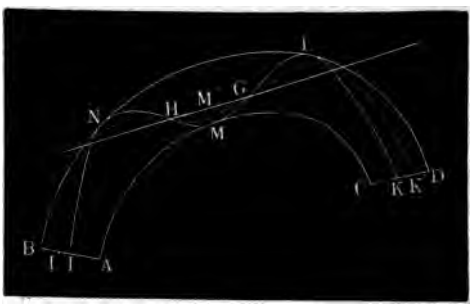
D'où il suit que toute autre courbe des pressions, qui, comme K'G M'H', est tout entière dans la voûte, ne peut tomber qu'entre la courbe KMI et la ligne GH. Une telle courbe des pressions répond

donc toujours à une poussée horizontale plus grande que KMI : donc celle-ci répond à la poussée minimum.

§ 46. Second cas, fournissant un second caractère pour le minimum et aussi un caractère pour le maximum de la poussée.

Soit la courbe KMI, entièrement comprise dans l'épaisseur de la voûte, ayant deux points communs L, N, avec l'extrados et un troisième, compris entre L et N, avec l'intrados. (L,N peuvent, l'un ou l'autre ou tous les deux, coïncider respectivement avec les extrémités de l'extrados, sans contact entre les deux courbes). Une telle courbe répond à un minimum ou un maximum de poussée, suivant qu'elle satisfait à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

Fig. 81.



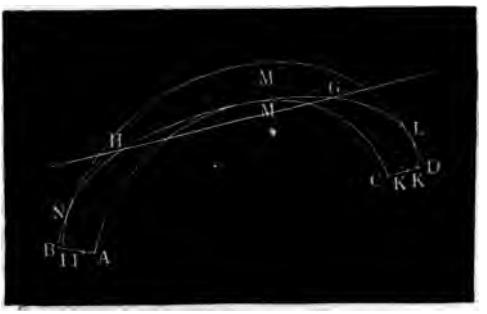
1° Si l'arc LMN (fig. 81) se trouve, dans le voisinage du point M, entre l'intrados et la droite LN, la courbe répond à un minimum de la poussée ; car alors toute droite GH qui unit un nombre impair de points de MN à un nombre impair de points de LM, et qui ainsi est propre à renfermer les points communs de KMI avec une autre courbe des pressions quelconque, telle que K'M'I', laissera nécessairement, dans le voisinage des points L, M, N, les arcs KLG, GMH, HNI entre elle et la courbe-contour correspondante. Donc toute autre courbe des pressions possible, comme K'M'I', ne peut tomber qu'entre GH et KMI, donc elle a une poussée plus grande que KMI. Donc cette dernière est minimum.

2° Si l'intrados, dans le voisinage du point M, est entre l'arc LMN et la droite LN, la courbe KMI répond à un maximum de la poussée horizontale (fig. 82).

Car alors les arcs KLG, GMH, HNI, dans le voisinage des points L, M, N, sont toujours entre une autre courbe des pressions quelconque et la droite GH ci-dessus définie qui joint les points com-

muns de ces deux courbes ; toute autre courbe des pressions répond donc à une poussée moindre : donc celle-ci répond à un maximum.

Fig. 82.



Il est à peine besoin de dire que les deux sortes de courbes de pression à poussée minimum dont il a été question dans le paragraphe précédent et dans celui-ci ne peuvent exister simultanément. L'une ou l'autre, ou, dans d'autres cas, l'une et l'autre sont impossibles.

Il peut arriver qu'une courbe des pressions possédant les caractères ci-dessus, indicatifs d'un minimum ou d'un maximum, ait avec les courbes-contours un quatrième point commun en sus des trois qui la caractérisent. Cette courbe présentera alors deux fois le caractère du minimum, ou deux fois celui du maximum, ou en même temps le caractère du minimum et celui du maximum. Le premier et le deuxième cas n'offrent rien de remarquable ; dans le troisième, on reconnaît que les données ne permettent l'existence que d'une seule courbe des pressions comprise entre les courbes-contours, puisque cette ligne réunit les conditions du minimum et du maximum de la poussée.

§ 47. Instabilité des voûtes.

On reconnaît comme il suit les cas où l'équilibre d'une voûte est impossible.

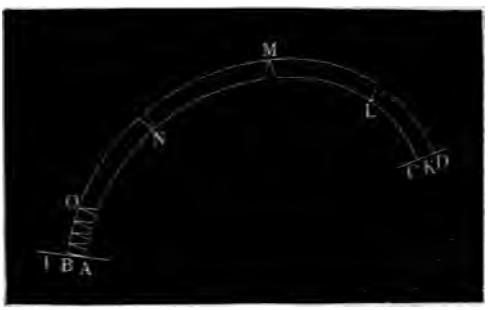
Quand une courbe des pressions quelconque, comme KMI (fig. 83), traverse au moins trois fois l'épaisseur entière de la voûte sans rester tout entière dans l'intérieur, et quand, en même temps, les trois segments de cette courbe, LM, MN, NO, sont tels qu'on ne puisse tirer une droite joignant un nombre impair de points de chacun d'eux, alors il n'y a pas de courbe des pressions possible : aucune courbe des pressions ne demeurera dans l'intérieur de la voûte. En effet, toute courbe possible devrait couper la première en des points disposés

comme nous venons de le dire : dans ce cas, l'équilibre est donc impossible et la voûte se rompra par rotation alternativement autour des arêtes intérieures et extérieures. Par exemple, on sera sûr de cette instabilité si la courbe KMI définie plus haut est concave en tous ses points entre les points de contact extrêmes L et O.

La voûte n'étant pas en équilibre, cette même courbe (qui, si elle ne sortait pas de la voûte, serait la courbe au minimum de poussée) indique la manière dont la courbe se rompra : à tous les points L, M, N, O où la courbe rencontre les courbes-contours, et à tous les points compris entre O et B pour lesquels la courbe est en dehors de la voûte, il se produira des rotations des voussoirs autour des arêtes intérieures ou extérieures.

On comprend que, dans la rupture de cette voûte, il se produira des pressions aux arêtes d'extrados sans pour cela que la courbe des pressions suive l'extrados de O à B. La pression qui se produit aux arêtes, entre O et B, pendant le mouvement de la voûte, n'est pas identique à la pression qui correspondrait sur ce joint à la courbe KMI; elle est avec celle-ci dans une relation analogue à celle de la pression exercée sur l'arête de rotation d'un corps imparfaitement soutenu qui se renverse, avec le poids du même corps.

Fig. 83.

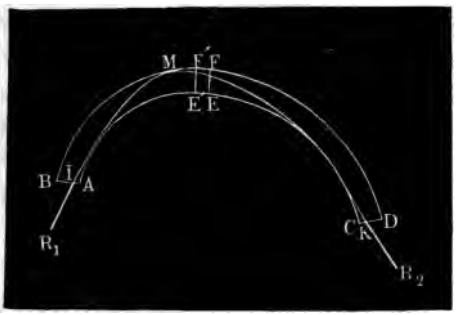


§ 48. Joint où règne une pression horizontale.

Il existe dans une voûte stable un joint EF où la pression mutuelle des voussoirs est horizontale, et égale par conséquent à la poussée de la voûte ; ce joint sépare la voûte en deux segments, tels que leurs poids respectifs accrus de leurs surcharges égalent les composantes verticales correspondantes des réactions des culées. On reconnaît aisément que la courbe IMK (fig. 84) doit avoir nécessai-

rement sur ce joint une tangente horizontale [1], ce qui ne veut nullement dire qu'en un point quelconque de la courbe des pressions, où la tangente peut accidentellement être horizontale, la pression soit pour cela horizontale et égale à la poussée.

Fig. 81



Si l'on partage les réactions R_1 et R_2 en deux composantes P', Q' et P'', Q'', savoir P', P'' verticales et Q', Q'' suivant la droite IK des points d'application extrêmes, les deux composantes Q', Q'' seront égales et opposées; les composantes verticales de bas en haut P', P'' seront égales aux composantes qu'on obtient en partageant le poids de la voûte, concentré en son centre de gravité, en forces verticales appliquées en I et K. Si l'on choisit ensuite le joint E'F', de sorte que le poids de la partie ABF'E' égale P' et le poids de CDF'E' égale P'', la pression au joint E'F' sera parallèle à la droite IK et égalera Q' = Q'', sans pour cela que la tangente à la courbe IMK sur ce joint soit nécessairemant parallèle à IK.

Généralement le joint E'F', qui est toujours à gauche de EF quand le point I est plus bas que K, se rapproche plus du point M de contact avec l'extrados que ne fait le joint EF à pression horizontale, déterminé ci-dessus.

[1] Considérons, en effet, l'équilibre du voussoir élémentaire qui suit le joint qu'on vient de définir; prenons les moments autour du point d'application sur ce joint de la pression horizontale. Le poids du voussoir et sa surcharge auront un moment infiniment petit du second ordre : il faut donc que le moment de la réaction du voussoir suivant soit infiniment petit du second ordre, ce qui ne peut être qu'à la condition que l'angle de l'élément de courbe avec la réaction soit infiniment petit. Donc cet élément est horizontal. — Ce raisonnement ne s'applique pas au cas où la pression n'est pas horizontale et ne peut établir que la pression est tangente à la courbe en général, ce qui est d'ailleurs faux : le moment du poids du voussoir n'est infiniment petit du second ordre que quand le joint est vertical. Nous admettons implicitement qu'on fera le joint vertical là où la pression sera horizontale.

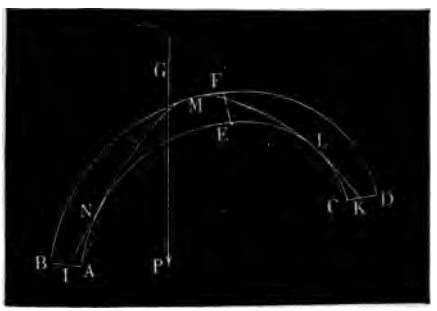
§ 49. Recherche de la vraie courbe des pressions.

Des considérations précédentes on déduit une méthode simple pour construire approximativement la courbe des pressions qui répond au minimum de la poussée horizontale.

La simple inspection de la voûte donnée et de sa surcharge fera connaître quelle forme générale affectera la courbe cherchée; si elle appartient à la première ou à la seconde des classes que nous avons distinguées, et si les points extrêmes I, K s'approchent respectivement davantage de A et C ou de B et D (fig. 85).

Si l'on préjuge que la courbe cherchée appartient à la première classe (§ 45) et en outre que ses extrémités se rapprochent plus de A et C que de B et D : on essayera d'abord de prendre A, C pour points de départ ; on décomposera par le théorème des moments le poids P de la voûte en deux forces verticales P′, P″ agissant en A et C. Soit E′F′ le joint qui décompose la voûte en deux poids égaux à P′, P″; on admettra que F′ est un troisième point de la courbe, et on construira la courbe des pressions passant par les trois points A, F′, C. Si cette courbe ne sort pas de la voûte, ce sera la courbe cherchée au minimum de poussée horizontale. Autrement, soient N, M, L les points de l'intrados et de l'extrados qui répondent aux plus grands écarts de cette première courbe des pressions en dehors de la voûte. On construira une deuxième courbe d'essai par les points N, M, L. Celle-ci s'approchera bien plus que la première de la courbe cherchée, et on pourra tracer la courbe cherchée en faisant une nouvelle correction ou en traçant la courbe nouvelle au jugé, si l'on ne préfère modifier un peu la forme de la voûte elle-même.

Fig. 85.



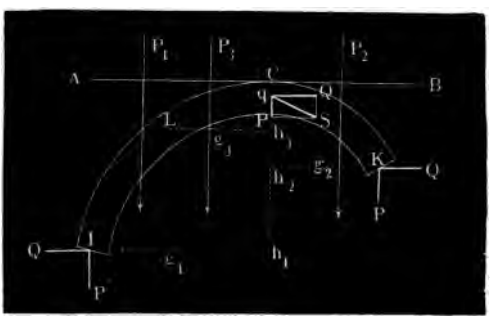
§50. Calcul des éléments nécessaires pour la construction d'une courbe des pressions.

Pour appliquer la méthode qui précède, il faut savoir construire une courbe des pressions passant par trois points donnés.

Pour résoudre ce problème, je suppose connues en l'un de ces points la grandeur et la direction de la pression ou ses composantes. En composant cette pression avec le poids d'un segment de voûte quelconque à droite ou à gauche, on aura une résultante qui coupera le joint extrême de ce segment en un point appartenant à la courbe, et dont la pression sera donnée par cette résultante en grandeur et en direction.

Soient I, L, K (fig. 86) trois points par lesquels on veut faire passer une courbe des pressions, ACB une horizontale menée par le point le plus haut de l'extrados, et soit :

Fig 86.



Q, la poussée horizontale, c'est-à-dire la composante horizontale de l'une quelconque des pressions agissant en I, L, K ;

P, la composante verticale de la pression S qui règne au joint du sommet C, laquelle sera considérée comme positive si elle est dirigée de bas en haut en tant que pression de la partie droite sur la partie gauche ;

q, la distance verticale du point d'application de cette pression à l'horizontale ACB ;

g_1, h_1 ; g_2, h_2 ; g_3, h_3, les coordonnées horizontales et verticales de I, K, L ;

P′, P″, P‴, les composantes verticales des pressions agissant en ces points ;

P_1, P_2, P_3, les poids des segments CI, CK, CL, avec leurs surcharges ;

p_1, p_2, p_3, les distances horizontales des centres de gravité de ces segments au point C.

Posons encore, comme abréviations :

$$g_1 - p_1 = a_1 \qquad g_2 - p_2 = a_2 \qquad g_3 - p_3 = a_3$$
$$h_1 - q = b_1 \qquad h_2 - q = b_2 \qquad h_3 - q = b_3$$
$$g_2 + g_3 = d_1 \qquad g_1 - g_3 = d_2 \qquad g_1 + g_2 = d_3$$
$$h_2 - h_3 = e_1 \qquad h_1 - h_3 = e_2 \qquad h_1 - h_2 = e_3$$

On a :

$$P' + P = P_1 \qquad (1)$$
$$P'' - P = P_2 \qquad (2)$$
$$a_1 P_1 - g_1 P = b_1 Q \qquad (3)$$
$$a_2 P_2 + g_2 P = b_2 Q \qquad (4)$$
$$a_3 P_3 - g_3 P = b_3 Q \qquad (5)$$

Si le troisième point donné est sur le joint au sommet C, la valeur de q est connue, et l'on a : $g_3 = 0$, $h_3 = q$, $P_3 = 0$. On tire alors de (3) et (4).

$$P = \frac{a_1 e_1 P_1 - a_2 e_2 P_2}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (6)$$

$$Q = \frac{a_1 d_1 P_1 - a_2 d_2 P_2}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (7)$$

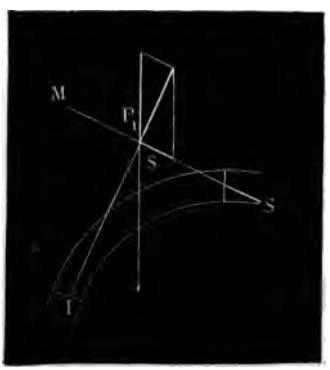
Si L n'est pas sur le joint au sommet, on a :

$$P = \frac{a_1 e_1 P_1 - a_2 e_2 P_2 + a_3 e_3 P_3}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (8)$$

$$Q = \frac{a_1 d_1 P_1 + a_2 d_2 P_2 - a_3 d_3 P_3}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (9)$$

$$q = h_1 - \frac{a_1 P_1 - g_1 P}{Q} \qquad (10)$$

Fig. 87.



Dans les deux cas, on a pour les composantes verticales en I et K :

$$P' = P_1 - P \qquad (11)$$
$$P'' = P_2 + P \qquad (12)$$

Ayant ainsi P, Q, et par suite leur résultante S qui est la pression sur le joint du sommet, on construit facilement les parties droite et gauche de la courbe des pressions par la méthode déjà connue, en composant progressivement la force oblique S avec les poids partiels P_1, P_2, etc. (fig. 87).

§ 51. Premier exemple. Plein cintre avec charges dyssymétriques.

Dans le dessin (fig. XV à la fin du volume) on a admis que l'arc à plein cintre symétrique, dont l'épaisseur est $0^m,47$ et dont le rayon intérieur est $3^m,14$, est libre de toute charge, excepté au point extérieur du troisième joint de gauche, qui supporte une charge (par exemple, un mur reposant en long sur le rein de la voûte) correspondant à une surface de $0^{mq},99$, avec une densité égale à celle des voussoirs. Cette charge sera intercalée à sa place dans le tableau suivant.

Chacun des deux demi-arcs est partagé à partir du sommet en huit parties, dont les quatre premières ont une largeur de $0^m,63$, les deux suivantes $0^m,31$ et les dernières $0^m,24$. On compose ensuite de la manière suivante les tableaux correspondant aux deux demi-arcs :

Côté gauche									
FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m.q.	m. c.	m.
1	0,63	0,47	0,30	0,31	0,09	1	0,30	0.09	0,31
2	0,63	0,50	0,31	0,94	0,29	1 + 2	0,61	0,38	0,64
3	0,63	0,54	0,34	1,57	0,53	1 + 2 + 3	0,95	0,91	0,97
3 *a*	»	»	0,99	2,00	1,98	1 + ... 3 *a*	1,94	2,89	1,50
4	0,63	0,63	0,40	2,20	0,88	1 + .. 4	2,34	3,77	1,62
5	0,31	0,78	0,24	2,67	0,64	1 + ... 5	2,58	4,41	1,72
6	0,31	1,07	0,33	2,98	0,98	1 + ... 6	2,91	5,39	1,86
7	0,24	1,55	0,37	3,26	1,21	1 + .. 7	3,28	6,60	2,02
8	0,24	0,90	0,22	3,49	0,75	1 + ... 8	3,50	7,35	2,10
			3,50		7,35				

Côté droit									
FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m. q.	m.	m. c.		m.q.	m.c.	m.
1	0,63	0,47	0,30	0.31	0,09	1	0,30	0,09	0,31
2	0,63	0,50	0,31	0,94	0,29	1 + 2	0,61	0,38	0,64
3	0,63	0,54	0,34	1,57	0,53	1+.... 3	0,95	0,91	0,97
4	0,63	0,63	0,40	2,20	0,88	1+.... 4	1,35	1,79	1,33
5	0,31	0,78	0,24	2,67	0,64	1+... 5	1,59	2,43	1,54
6	0,31	1,07	0,33	2,98	0,98	1+.... 6	1,92	3,41	1,79
7	0,24	1,55	0,37	3,26	1,21	1+.... 7	2,29	4,62	2,01
8	0,24	0,90	0,22	3,49	0,75	1+.... 8	2,51	5,37	2,15
			2,51		5,37				

Pour obtenir la vraie courbe des pressions, on commencera par construire une courbe d'essai, comme on l'a fait dans les exemples précédents. On admettra que cette courbe passe par les points intérieurs des deux joints de naissance et par le point supérieur de la clef. Cette hypothèse permet de réunir comme il suit les données nécessaires au calcul des composantes horizontale et verticale de la pression qui agit en A au joint du sommet.

On a d'abord les coordonnées des points intérieurs des naissances : $g_1=3,14$; $h_1=3,61$; $g_2=3,14$; $h_2=3,61$; puis l'on tire de la colonne (8) du premier tableau $P_1=3,50$ et de la colonne (10) le bras de levier correspondant $p_1=2,10$; de même du second tableau $P_2=2,51$, $p_2=2,15$.

D'où :

$$a_1=g_1-p_1=3,14-2,10=1,04\,;\quad d_1=g_2+g_3=3,14+0=3,14\,;$$
$$a_2=g_2-p_2=3,14-2,15=0,99\,;\quad d_2=g_1-g_3=3,14-0=3,14\,;$$
$$a_3=g_3-p_3=0\,;\qquad d_3=g_1+g_2=3,14+3,14=6,28$$
$$e_1=h_2-h_3=3,61-0=3,61\,;\ P_1=3,50\,;$$
$$e_2=h_1-h_3=3,61-0=3,61\,;\ P_2=2,51\,;$$
$$e_3=h_1-h_2=3,61-3,61=0\,;\ q=0.$$

Le troisième point donné étant ici le point le plus haut de la clef, les forces P et Q se calculeront par les équations (6) et (7).

$$P = \frac{a_1 e_1 P_1 - a_2 e_2 P_2}{e_2 d_3 - e_3 d_2} = \frac{1{,}04.3{,}61\ 3{,}5 - 0\ 99.3{,}61.2{,}51}{3{,}61.6{,}28 - 0} = 0{,}18.$$

$$Q = \frac{a_1 d_1 P_1 + a_2 d_2 P_2}{e_2 d_3 - e_3 d_2} = \frac{1{,}04.3{,}14\ 3{,}5 + 0{,}99.3{,}14.2{,}51}{3{,}61.6{,}28 - 0} = 0{,}85.$$

En composant ces deux forces P = AB et Q = AC, on obtient en grandeur et en direction la résultante S = AD, qui, successivement composée avec les forces verticales élémentaires, donne les points de rencontre de la courbe des pressions avec les joints. Pour avoir, par exemple, le point de rencontre avec le quatrième joint de chaque côté, on porte sur l'horizontale du point A, à gauche et à droite respectivement, les longueurs Ar = 1,62 et Ar' = 1,33 des bras de levier répondant aux segments supérieurs au quatrième joint; on élève en r et r' des verticales qui rencontrent la ligne DAD en v, v; sur ces verticales on prend les longueurs vw = 2,34, vw = 1,35; on fait, parallèlement à AD, wx, wx égaux à la force S = AD. xv est, de chaque côté, la résultante de la force verticale et de la poussée oblique, et, prolongée suffisamment, elle coupe le quatrième joint au point cherché y. Ainsi des autres.

Cette ligne coupe les courbes-contours : ce n'est donc pas la vraie courbe des pressions. La courbe cherchée passera dans ce cas, savoir : du côté gauche, par le point intérieur d'un joint tel que 5a et par le point extérieur du premier joint, et du côté droit, par le point intérieur du cinquième joint approximativement.

Le joint 5a, du côté gauche de l'arc, n'est pas calculé dans le tableau ci-dessus. On l'y introduira en décomposant le sixième joint en deux parties ayant respectivement pour largeur 0,19 et 0,12. Le premier tableau devient comme il suit :

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES		
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	m.	m.	m. q.	m	m. c.		m q.	m. c.
1	0,63	0,47	0,30	0,31	0,09	1	0,30	0,09
2	0,63	0,50	0,31	0,94	0,29	1 + 2	0,61	0,38
3	0,63	0,54	0,34	1,57	0,53	1+. . 3	0,95	0,91
3 *a*	»	»	0,99	2,00	1,98	1+... 3 *a*	1,94	2,89
4	0,63	0,63	0,40	2,20	0,88	1+ .. 4	2,34	3,77
5	0,31	0,78	0,24	2,67	0,64	1+... 5	2,58	4,41
5 *a*	0,19	0,94	0,18	2,92	0,53	1+... 5 *a*	2,76	4,94
6	0,12	1,16	0,14	3,08	0,43	1+... 6	2,90	5,37
7	0,24	1,55	0,37	3,26	1,21	1+... 7	3,27	6,58
8	0,24	0,90	0,22	3,49	0,75	1+. . 8	3,49	7,33
			3,49		7,33			

Le tableau du côté droit ne change pas.

Le troisième point ne tombant plus à la clef, on calculera l ces P et Q au moyen des équations (8) et (9), et leur point d'a tion par l'équation (10).

On aura pour les coordonnées les forces verticales et leurs l levier, savoir :

Au point intérieur du joint 5*a*,

$$g_1 = 2{,}83\,;\ h_1 = 2{,}20\,;\ P_1 = 2{,}76\,;\ p_1 = 1{,}79\,;$$

Au point intérieur du joint 5,

$$g_2 = 2{,}64\,;\ h_2 = 1{,}92\,;\ P_2 = 1{,}59\,;\ p_2 = 1{,}54\,;$$

Au point extérieur du joint f,

$$g_3 = 0{,}80\,;\ h_3 = 0{,}06\,;\ P_3 = 0{,}30\,;\ p_3 = 0{,}31.$$

D'où l'on tire :

$$P = \frac{a_1e_1P_1 - a_2e_2P_2 + a_3e_3P_3}{e_2d_3 - e_3d_2}$$

$$= \frac{1{,}03.1{,}85.2{,}76 - 1{,}10.2{,}14.1{,}59 + 0{,}39.0{,}29.0{,}30}{2{,}14.5{,}46 - 0{,}29.2{,}13} = 0{,}14.$$

$$Q = \frac{a_1 d_1 P_1 + a_2 d_2 P_2 - a_3 d_3 P_3}{e_2 d_3 - e_3 d_2}$$

$$= \frac{1,03.3,34.2,76 + 1,10.2,13.1,59 - 0,39.5,46.0,30}{2,14.5,46 - 0,29.2,13} = 1,15.$$

$$q = h_1 - \frac{a_1 P_1 - g_1 P}{Q} = 2,20 - \frac{1,03.2,76 - 2,83.0,14}{1,15} = 0,047.$$

Pour construire la force S, on fait $AA' = q$, on fait passer par A' l'horizontale A'C', on fait $A'C' = Q$ et $A'B' = P$: A'D' est la force oblique S.

On aura le point où la nouvelle courbe des pressions coupe le quatrième joint, par exemple, en faisant $v'w' = vw$, menant par w' une parallèle à A'D', prenant sur cette ligne $w'x' = S$ et tirant la ligne $x'v'y'$: y' est le point cherché.

La courbe ainsi construite touche les courbes-contours de la manière prévue, et peut par conséquent être considérée comme la vraie courbe des pressions.

§ 52. Second exemple. Arc à forme dyssymétrique avec charge supérieure fixe.

Nous allons prendre pour exemple une voûte en arc de cercle (fig. XVI à la fin du volume), dont l'intrados est décrit avec un rayon de $3^m,14$, et dont l'épaisseur est de $0^m,47$.

La hauteur de la charge au-dessus du sommet de la voûte est de $3^m,14$, son poids spécifique égale celui des voussoirs; et cette charge est arasée horizontalement.

La partie de voûte située à gauche du sommet A peut se décomposer en huit segments, les quatre premiers ayant une largeur de $0^m,63$, les deux suivants de 0^m31 et les deux derniers de $0^m,24$; la partie du côté droit est plus courte et se décompose en quatre segments, les deux premiers de $0^m,63$ de largeur, le troisième et le quatrième de $0^m,82$ et $0^m,31$ de largeur respective.

Les deux tableaux de calculs correspondant à ces données s'établissent comme il suit :

Côté gauche

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m q.	m.	m c.		m.q.	m c.	m.
1	0 63	3,64	2,29	0,31	0,71	1	2,29	0,71	0,31
2	0,63	3,77	2,38	0,94	2,24	1 + 2	4,67	2,95	0,63
3	0,63	4,05	2,55	1,57	4,00	1+ ... 3	7,22	6,95	0,96
4	0,63	4,49	2,83	2,20	6,23	1+ ... 4	10,05	13,18	1 31
5	0,31	5,09	1,58	2,67	4,22	1+.... 5	11,63	17,40	1,50
6	0,31	5,78	1,79	2,98	5,33	1+.... 6	13,42	22,73	1,70
7	0,24	6,75	1,62	3,26	5,28	1+.... 7	15,04	28,01	1,86
8	0,24	6,75	1,62	3,49	5,65	1+.... 8	16,66	33,66	2,02
			16,66		33,66				

Côté droit

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m	m	m q.	m.	m c		m q	m. c.	m.
1	0,63	3,64	2,29	0,31	0,71	1	2,29	0,71	0,31
2	0,63	3,77	2,38	0,94	2,24	1 + 2	4,67	2,95	0,63
3	0,82	4,08	3,35	1,66	5,56	1+.... 3	8,02	8,51	1,06
4	0,31	4,21	1,31	2,23	2,92	1+.... 4	9,33	11,43	1,23
			9,33		11,43				

On construit ensuite une courbe d'essai passant par les points intérieurs des naissances et le point le plus haut A de la voûte.

Les coordonnées des deux points aux naissances sont : $g_1 = 3,14$; $h_1 = 3,61$, et $g_2 = 2,07$; $h_2 = 1,22$. Le poids de la partie gauche $P_1 = 16,66$; son bras de levier $p_1 = 2,02$; le poids de la partie droite $P_2 = 9,33$; son bras de levier $p_2 = 1,23$.

D'où l'on tire :

$$a_1=g_1-p_1=3,14-2,02=1,12\,;\ d_1=g_2+g_3=2,07+0=2,07\,;$$
$$a_2=g_2-p_2=2,07-1,23=0,84\,;\ d_2=g_1-g_2=3,14-0=3,14\,;$$
$$d_3=g_1+g_2=3,14+2,07=5,21$$
$$e_1=h_2-h_3=1,22-0=1,22\,;\ P_1=16,66\,;$$
$$e_2=h_1-h_3=3,61-0=3,61\,;\ P_2=9,33\,;$$
$$e_3=h_1-h_2=3,61-1,22=2,39.$$

$$P=\frac{a_1e_1P_1-a_2e_2P_2}{e_2d_3-e_3d_2}=\frac{1,12\ 1,22\ 16,66-0,84.3,14.9,33}{3,61.5,21-2,39.3,14}=-0,48.$$

$$Q=\frac{a_1d_1P_1+a_2d_2P_2}{e_2d_3-e_3d_2}=\frac{1,12.2,07.16,66+0,84.3,6.9,33}{3,61.5,21-2,39.3,14}=5,64.$$

Le calcul donne ici pour la composante verticale P une valeur négative, d'où il suit qu'en son point d'application A elle est dirigée de haut en bas ; en établissant nos formules, nous avons admis en effet que cette force était comptée comme positive lorsque, agissant du côté droit de la voûte sur le côté gauche, elle était dirigée de bas en haut.

En conséquence, pour construire la pression S qui règne au sommet A, on portera sur la verticale de ce point, et au-dessus de lui, la composante P=AB, qu'on composera avec l'horizontale Q=AC, ce qui donnera en grandeur et en direction la force S=AD. La construction de la courbe s'ensuit comme précédemment.

Cette courbe, du côté droit, demeure dans l'épaisseur de la voûte; du côté gauche, elle est en grande partie en dehors, de sorte que, pour avoir la vraie courbe des pressions, il faut recommencer le calcul en faisant passer la courbe par le point intérieur du joint de la culée droite, par le point supérieur A du joint au sommet et par le point intérieur du cinquième joint du côté gauche.

Les coordonnées de ce dernier point sont $g_1=2^m,51$, $h_1=1,70$; le poids du segment qui s'appuie sur ce joint, charge comprise, est $P_1=11,63$; son bras de levier $p_1=1,50$; les autres nombres sont les mêmes que dans le premier calcul. On a donc :

$$a_1=g_1-p_1=2,51-1,50=1,01\,;\ d_1=g_2+g_3=2,07\,;\ e_1=h_2-h_3=1,22\,;$$
$$a_2=g_2-p_2=0,84\,;\ d_2=g_1-g_2=2,51\,;\ e_2=h_1-h_3=1,70\,;$$
$$d_3=g_1+g_2=4,58\,;\ e_3=h_1-h_2=0,48.$$

$$P=\frac{a_1e_1P_1-a_2e_2P_2}{e_2d_3-e_3d_2}=\frac{1,01.1,22.11,63-0,84.1,70.9,33}{1,70.4,58-0,48.2,51}=0,19,$$

$$Q = \frac{a_1 d_1 P_1 + a_2 d_2 P_2}{e_2 d_2 - e_3 d_2} = \frac{1,01 . 2,07\ 11,63 + 0,84 . 2,51 . 9,53}{1,70 . 4,58 - 0,48 . 2,51} = 6,77.$$

Ce calcul donne pour la composante verticale une valeur positive AB′, qui, portée au-dessous de A vers B′ et composée avec l'horizontale Q = AC′, détermine la direction et la grandeur de la nouvelle force S = AD′.

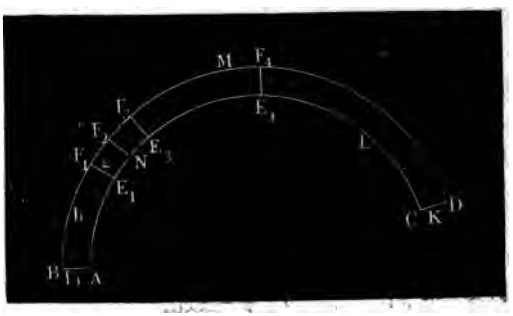
La ligne ainsi construite demeure comprise entre les courbes-contours, les touche, comme on s'y attendait, en deux points et rencontre l'intrados à la naissance du côté droit. On peut la considérer comme la vraie courbe des pressions.

§ 53. Remarques sur les changements que la courbe des pressions éprouve quand on ajoute à la charge un poids isolé.

Il est intéressant pour la pratique de considérer les changements qu'éprouve la vraie courbe des pressions quand on établit un poids isolé en tel ou tel point de la voûte.

La théorie générale que nous avons exposée permet de construire facilement la courbe répondant à ce cas ; il serait trop long d'énumérer toutes les apparences qui peuvent se produire. Nous allons toutefois énoncer quelques propositions générales en les appliquant à un cas particulier choisi comme exemple et comme type ; nous laissons au lecteur le soin d'en trouver les démonstrations, lesquelles se déduisent aisément des propriétés de la courbe des pressions.

Fig. 88



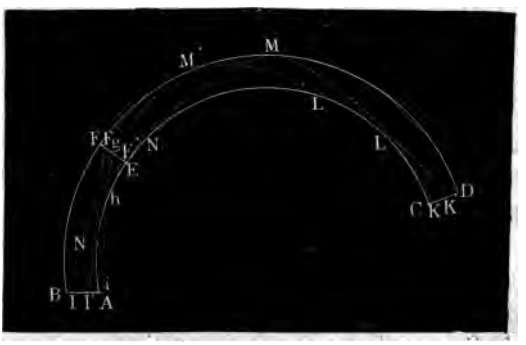
Soit INMLK la forme spéciale de la vraie courbe des pressions dans la voûte ABDC (fig. 88), dans laquelle le point extérieur F_1 du joint de rupture se trouve à droite de la verticale AF_1 menée par le point A.

Si l'on place un poids S en un point quelconque situé entre B et F_1, la poussée horizontale de la voûte n'en sera pas changée, quel que soit ce poids : cela n'augmentera que la composante verticale de la pression sur la face AB, et par suite la partie de la courbe des pressions située à gauche du poids additionnel se rapprochera de la verticale suivant laquelle agit ce poids. Si le poids S était, par exemple, appliqué en F_1, on aurait, entre les joints AB et E_1F_1, la courbe *ihg*, laquelle couperait manifestement la courbe KMI en un point *h* placé sur la verticale du point F_1; au delà du joint F_1E_1, l'ancienne courbe KMN ne changerait pas, et c'est ainsi la ligne KMN*ghi* qui satisferait à la condition du minimum de poussée.

Si le poids S occupe une position quelconque entre F_1 et F_2, mais qu'il soit assez faible pour que, en conservant la partie de la courbe à droite de S, la partie de courbe située à gauche, et qui change nécessairement, ne vienne pas sortir de l'intrados, ce que nous disions dans le cas précédent s'appliquera encore.

Mais si l'intensité de S augmente, la poussée horizontale augmentera, et avec elle changera la figure de la courbe des pressions dans toute son étendue. Dans ce dernier cas, supposons pour un moment que la pression de la culée CD conserve sa valeur et son point d'application K; nous aurons alors (fig. 89) une courbe telle que *ghi* pour la continuation de la courbe, à gauche du joint EF, dont l'extrémité F est le point d'application du poids S. D'après ce qui précède, *ghi* coupera l'intrados. Cette courbe ne saurait être la vraie courbe des pressions. La véritable doit couper la première une fois entre L et M, une seconde fois entre M et N, et en outre satisfaire à la condition du minimum de la poussée horizontale. Elle aura donc la forme K'L'M'E'F'N'I', et ainsi les points de rupture L, M, N reculeront simultanément vers la gauche en L', M', N'. Il en résultera toujours une augmentation de la poussée, attendu que K'M'I' se trouve placée entre la pren

Fig. 89.



courbe KM*i* et la droite qui passe par leurs points d'intersection.

Si le poids S est appliqué entre les deux points F_2 (fig. 88), extrémité extérieure du joint de rupture, et F_3, point de l'extrados placé verticalement au-dessus du point intradossal du joint de rupture F_2N, il faut distinguer deux cas : si le poids S demeure assez petit pour qu'en conservant la partie de courbe à droite de S, la partie gauche nouvelle demeure dans l'épaisseur de la voûte, il s'ensuivra un changement de la courbe des pressions, mais ce changement répondra à une diminution de la poussée. Cette assertion, surprenante au premier abord, se justifie par cette considération, que, dans la première courbe tracée pour correspondre au poids S sans changer la poussée, il n'y a que deux points de contact avec le contour de la voûte, puisque la partie à gauche de S n'atteint pas ce contour. En passant de cette courbe, qui ne satisfait pas aux caractères du minimum de la poussée horizontale, à la vraie courbe des pressions, les deux points de rupture M, N reculent simultanément vers la droite, d'où résulte une courbe correspondant à une moindre poussée.

Si, au contraire, le poids S, situé comme ci-dessus, est assez fort pour que la branche nouvelle de la courbe KI, tracée régulièrement vers la gauche, coupe l'intrados, il y a nécessairement un changement de la vraie courbe des pressions, lequel correspond à une poussée plus grande, puisque les points de rupture s'avancent vers la gauche, comme nous l'avons vu dans le cas où la force S est appliquée entre F_1 et F_2.

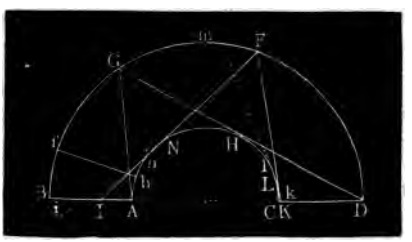
Si l'on place le poids S en un point quelconque entre F_3 et M (en supposant expressément que le joint vertical E_4F_4 est à droite du point M de rupture), le prolongement de la courbe KM à gauche de S, régulièrement construit, coupera nécessairement l'intrados : de sorte que, si petit que soit S, la vraie courbe des pressions sera telle que les points de rupture L, M reculeront vers la gauche, et ainsi la poussée augmentera.

Si F_4 était à gauche de M, nos dernières observations ne s'appliqueraient qu'à la partie comprise entre F_3 et F_4. Mais, revenant à la première hypothèse où F_4 est à droite de M, on doit encore considérer le cas où le poids S est appliqué entre M et F_4. Alors le prolongement de la courbe KL, à gauche de S, coupera toujours l'intrados, mais aussi s'éloignera tout à fait de l'extrados, de telle sorte que cette courbe n'aura plus avec le contour qu'un seul point

de contact L. Si maintenant S est suffisamment petit, la vraie courbe des pressions, coupant la précédente une seule fois entre K et L et touchant les limites de la voûte respectivement à droite de L, M, N, répondra à une poussée moindre que la précédente KMI. Si, au contraire, le poids S est assez grand, la vraie courbe des pressions coupera la première deux fois à gauche du point L, en sorte que le point de rupture L marchera vers la gauche, les points de rupture M, N à droite, et la poussée augmentera.

Dans le cas particulier où le poids S serait appliqué juste sur le point F_4 du joint vertical, on n'aurait qu'à répéter les considérations précédentes, si la charge entière S reposait sur une seule demi-voûte ABF_4E_4. Si, au contraire, ce poids repose pour moitié sur chacune des demi-voûtes, on devra considérer l'action de deux poids simultanés de $\frac{1}{2}$ S chacun, et agissant chacun sur une demi-voûte. Ainsi, on ne pourrait essayer de conserver la partie droite de la courbe primitive pour lui donner un prolongement vers la gauche, eu égard au poids $\frac{1}{2}$ S. Par suite de la répartition de S, la gauche et la droite de la courbe vont changer simultanément. Mais il est facile de reconnaître que, pour une petite valeur de S, on aura toujours une diminution de la poussée, et une augmentation pour une valeur suffisamment grande ; et cela soit que F_4 tombe à gauche ou à droite de M, pourvu que ces deux points ne coïncident pas. Mais, en cas de coïncidence, un poids S appliqué en F_4, si petit qu'on voudra, fera croître la poussée.

Fig. 90.



Nous n'avons pas à détailler les effets d'un poids S appliqué à droite du joint vertical E_4F_4 ; on n'aurait qu'à reproduire la discussion précédente en l'appliquant à la partie droite de l'arc.

Si l'on imagine un poids S infiniment grand appliqué en un point quelconque F (fig. 90), la vraie courbe des pressions affectera évidemment la forme KLFNI, où FK et FI sont deux droites tangentes à l'intrados en L et N, et déterminent sur les joints de cuées les points d'application K, I des pressions dont les composantes, tant horizontales que verticales, sont infinies. Ceci suppose toutefois

que le point F est compris entre les verticales des points A et C. Si le point d'application du poids infini S était à gauche de la verticale AG, comme en *f*, la vraie courbe des pressions affecterait la figure *klmnfi*, dans laquelle *fi* est une verticale, *nmlk* une courbe. Dans ce cas, le point *i* seul transmettrait à la culée AB une pression infinie, la pression en *k* sur CD serait au contraire finie, et sa composante horizontale égalerait la poussée de la voûte ainsi que la composante horizontale de l'infinie pression en *i*.

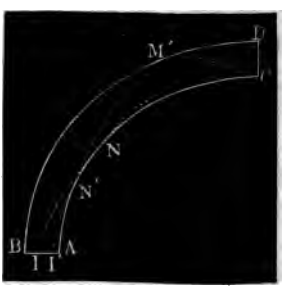
Supposons que la voûte ABDC soit un anneau circulaire. Menons la verticale AG, et soit GH tangente au cercle intérieur : GH passera en D, si $AB = CD = \frac{1}{2} AC$. Cela étant, on voit facilement que toutes les tangentes à l'intrados qui rencontrent l'extrados en des points compris entre les verticales A et C, seront tout entières dans l'épaisseur de la voûte.

D'où il suit qu'un semblable anneau demi-circulaire, dont l'épaisseur égale la moitié du rayon intérieur, ne peut être détruit par rotation des voussoirs par aucun poids vertical, si considérable qu'il soit, pourvu que les culées aient une résistance suffisante.

On peut rapprocher de ce résultat cet autre résultat connu, d'après lequel l'épaisseur d'une voûte en plein cintre non chargée doit être au moins $\frac{1}{9}$ ou 0,114 de son rayon intérieur pour la stabilité contre la rotation.

Enfin, il ne sera pas déplacé de faire remarquer la complète différence d'action d'une partie de voûte telle que ABDC (fig. 91), suivant qu'elle forme une partie, par exemple une moitié d'une voûte plus grande, ou qu'elle s'appuie contre deux surfaces fixes à ses deux extrémités AB, CD. Dans le premier cas, ABDC étant demi-voûte, la pression en CD est toujours horizontale, et la vraie courbe des pressions, comme DNI, ne traverse qu'une fois l'épaisseur de la voûte. Dans le second cas, où CD est une surface incompressible comme AB, la pression en CD n'est pas ordinairement horizontale. La vraie courbe des pressions, comme CM'N'I', traverse deux fois l'épaisseur de la voûte, et la poussée horizontale est moindre que dans

Fig. 91.

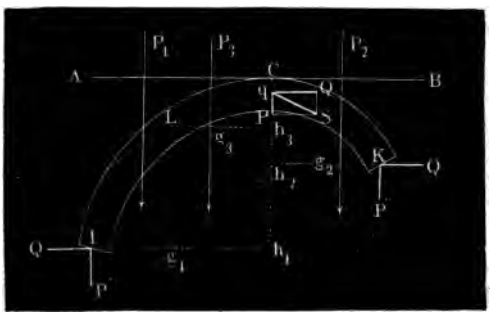


le premier cas : en effet, la courbe DNI, qui est dans les deux cas une courbe possible et qui n'est la véritable que dans le premier cas, se trouve entre la courbe CM'N'I' et la droite qui joint les points d'intersection des deux courbes.

§ 54. Équilibre de rotation pour des charges verticales et horizontales.

S'il se joint des forces horizontales aux charges verticales considérées jusqu'ici, cela n'aura pas d'influence grave sur les propriétés ci-dessus énoncées de la courbe des pressions, au moins dans tous les cas pratiques.

Fig. 92.



Conservons pour ce cas les notations du paragraphe 50 ; nommons en outre (fig. 92) :

Q la composante horizontale de la pression S agissant à la clef;

Q', Q'', Q''', les composantes horizontales respectives des pressions aux points I, K, L;

T_1, T_2 T_3, les forces horizontales agissant respectivement sur les voussoirs fictifs CI, CK, CL, et t_1, t_2, t_3, les distances de ces forces respectives à l'horizontale ACB. Posons enfin, pour abréger :

$$h_1 - t_1 = c_1 ; \; h_2 - t_2 = c_2 ; \; h_3 - t_3 = c_3 .$$

On a les relations :

$$P' + P = P_1 \quad (1) \qquad a_1 P_1 - g_1 P + c_1 T_1 = b_1 Q \quad (5)$$
$$P'' - P = P_2 \quad (2) \qquad a_2 P_2 + g_2 P + c_2 T_2 = b_2 Q \quad (6)$$
$$Q' + T_1 = Q \quad (3) \qquad a_3 P_3 - g_3 P + c_3 T_3 = b_3 Q \quad (7)$$
$$Q'' + T_2 = Q \quad (4)$$

Si le troisième point L de la courbe des pressions est au joint du sommet C, la valeur de q est donnée aussi, et

$$g_3 = 0, \; h_3 = q, \; P_3 = 0, \; T_3 = 0.$$

On tire alors, pour les composantes P et Q de la pression S, des équations (5) et (6) :

$$P = \frac{b_2 (a_1 P_1 + c_1 T_1) - b_1 (a_2 P_2 + c_2 T_2)}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (8)$$

$$Q = \frac{g_2 (a_1 P_1 + c_1 T_1) + g_1 (a_2 P_2 + c_2 T_2)}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (9)$$

Si L n'est pas à la clef, on obtient :

$$P = \frac{e_1 (a_1 P_1 + c_1 T_1) - e_2 (a_2 P_2 + c_2 T_2) + e_3 (a_3 P_3 + c_3 T_3)}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (10)$$

$$Q = \frac{d_1 (a_1 P_1 + c_1 T_1) + d_2 (a_2 P_2 + c_2 T_2) - d_3 (a_3 P_3 + c_3 T_3)}{e_2 d_3 - e_3 d_2} \qquad (11)$$

$$q = h_1 - \frac{a_1 P_1 + c_1 T_1 - g_1 P}{Q} \qquad (12)$$

On a toujours, pour les composantes des pressions en I et K :

$$P' = P_1 - P \quad (13) \qquad Q' = Q - T_1 \quad (15)$$
$$P'' = P_2 + P \quad (14) \qquad Q'' = Q - T_2 \quad (16)$$

Connaissant la pression à la clef, on construira la courbe des pressions à partir de la clef de chaque côté, en procédant comme au cas précédent.

§ 55. Exemple d'une voûte de pont du chemin de fer de Berg et Mark.

Nous avons déjà choisi cette voûte pour exemple, aux paragraphes 29 et 35, mais en supposant toujours une charge symétrique, comme cela a lieu après l'achèvement du remblai établi sur le pont. Nous admettrons ici, au contraire, que ce remblai (fig. XVII à la fin du volume) ait atteint du côté A la hauteur totale de 25^m,12 en couche continue, que la couche de l'autre côté B n'atteigne que la hauteur de 12^m,56, de sorte que la charge existant sur la voûte forme une figure dyssymétrique limitée par la ligne inclinée AB.

La voûte est en plein cintre, de 11^m,30 d'ouverture et de 0^m,94 d'épaisseur. Chacun des deux demi-arcs est partagé, ainsi que la

charge correspondante, à partir du sommet, en huit parties, dont les six premières ont une largeur de $0^m,94$, les deux dernières une largeur de $0^m,47$; les tableaux nécessaires pour le calcul s'établissent ainsi :

Côté gauche

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment	Numeros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m.q.	m	m. c.		m.q.	m.c.	m.
1	0,94	20,19	18,98	0,47	8,92	1	18,98	8,92	0,47
2	0,94	21,29	20,01	1,41	28,21	1+2	38,99	37,13	0,95
3	0,94	22,61	21,25	2,36	50,17	1+.... 3	60,24	87,30	1,45
4	0,94	23,99	22,55	3,30	74,41	1+.... 4	82,79	161,71	1,95
5	0,94	25,62	24,08	4,24	102,10	1+.... 5	106,87	263,81	2,47
6	0,94	28,04	26,36	5,18	136,55	1+.... 6	133,23	400,36	3,01
7	0,47	31,09	14,61	5,89	86,05	1+.... 7	147,84	486,41	3,29
8	0,47	31,46	14,79	6,35	93,92	1+.... 8	162,63	580,33	3,57
			162,63		580,33				

Côté droit

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES						SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Surface.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m.q.	m.	m. c.		m.q.	m.c.	m.
1	0,94	19,41	18,25	0,47	8,58	1	18,25	8,58	0,47
2	0,94	18,53	15,82	1,41	22,31	1+2	34,07	30,89	0,93
3	0,94	17,99	16,91	2,36	39,91	1+.... 3	50,98	70,80	1,39
4	0,94	17,65	16,59	3,30	54,75	1+.... 4	67,57	125,55	1,85
5	0,94	17,65	16,59	4,24	70,34	1+.... 5	84,16	195,89	2,31
6	0,94	18,21	17,12	5,18	88,68	1+.... 6	101,28	284,57	2,79
7	0,47	19,78	9,30	5,89	54,78	1+.... 7	110,58	339,35	3,05
8	0,47	19,37	9,10	6,35	57,78	1+.... 8	119,68	397,13	3,29
			119,68		397,13				

Côté gauche

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES								SOMMES PARTIELLES			
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge.	Produit.	f	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.	Bras
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(
	m.	m.	m.q.		m.q.	m.	m c.		m.q	m c.	
1	0,09	19,34	1,74	1/3	0,58	0,05	0,03	1	0,58	0,03	
2	0,19	20,38	3,87		1,29	0,19	0,25	1 + ... 2	1,87	0,28	
3	0,38	21,54	8.19		2,73	0,47	1,28	1 + ... 3	4,60	1,56	
4	0,57	22,92	13.06		4,35	0,94	4,09	1 + ... 4	8,95	5.65	
5	0,78	24,49	19,10		6,37	1,62	10,33	1 + ... 5	15,32	15,98	
6	1,26	26,41	33,28		11,09	2,64	29,28	1 + ... 6	26,41	45,26	
7	1,00	28,21	28,21		9,40	3,77	35,44	1 + ... 7	35,81	80,70	
8	2,32	30,33	70,37		23,46	5,43	127,39	1 + ... 8	59,27	208,09	
					59,27		208,09				

Côté droit

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES								SOMMES PARTIELLES		
Numéros.	Hauteur du segment.	Hauteur de charge.	Produit.	f	Force.	Bras de levier.	Moment.	Numéros.	Force.	Moment.
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
	m.	m.	m.q.		m.q.	m.	m.c.		m q.	m.c.
1	0,09	18,43	1,76	1/3	0,59	0,05	0,03	1	0,59	0,03
2	0,19	17,68	3,16		1,05	0,19	0,20	1 + ... 2	1,64	0,23
3	0,38	17,08	6,49		2,16	0,47	1,02	1 + ... 3	3,80	1,25
4	0,57	16,64	9,48		3,16	0,94	2,97	1 + ... 4	6,96	4,22
5	0,78	16,42	13,81		4,60	1,62	7,45	1 + ... 5	11,56	11,67
6	1,26	16,55	20,85		6,95	2,64	18,35	1 + ... 6	18,51	30,02
7	1,00	16,99	16,99		5,66	3,77	21,34	1 + ... 7	24,17	51,36
8	2,32	18,21	42,25		14,08	5,43	76,45	1 + ... 8	38,25	127,81
					38,25		127,81			

Nous allons détailler le calcul d'une courbe des pressions pa
par les points intérieurs des deux naissances et par le somm

clef. Les nombres nécessaires pour la détermination des deux mposantes P et Q de la pression S sont les suivants :

$g_1=5,65$; $h_1=6,59$; $a_1=g_1-p_1=5,65-3,57=2,08$; $b_1=h_1-q=6,59$.
$g_2=5,65$; $h_2=6,59$; $a_2=g_2-p_2=5,65-3,29=2,36$; $b_2=h_2-q=6,59$.
$d_1=g_2+g_3=5,65$; $e_1=h_2-h_3=6,59-\ \ 0=6,59$.
$c_1=h_1-t_1=6,59-3,51=3,08$.
$d_2=g_1-g_3=5,65$; $e_2=h_1-h_3=6,59-\ \ 0=6,59$.
$c_2=h_2-t_2=6,59-3,34=3,25$.
$d_3=g_1+g_2=11,30$; $e_3=h_1-h_2=6,59-6,59=\ \ 0$.
$P_1=162,63$; $P_2=119,68$; $T_1=59,27$; $T_2=38,25$.

D'où l'on tire :

$$P=\frac{b_2\,(a_1P_1+c_1T_1)-b_1\,(a_2P_2+c_2T_2)}{e_2d_3-e_3d_2}$$

$$=\frac{6,59\ (2\ 08\times162.63+3.08\times59.27)-6,59\ (2.36\times119.68+3\ 25\times38,25)}{6,59\times11,30}=10,1.$$

$$Q=\frac{g_2\,(a_1P_1+c_1T_1)+g_1\,(a_2P_2+c_2T_2)}{e_2d_3-e_3d_2}$$

$$=\frac{5.65\ (2.08\times162,63+3.08\times59,27)+5\ 65\ (2.36\times119,68+3,25\times38.25)}{6,59\times11,30}=71,7.$$

En composant ces deux forces P=CE et Q=CD, on obtient la lirection FCG de la pression S qui s'exerce au joint du sommet, et a grandeur CF de cette force. On construit ensuite la courbe HCI comme on l'a vu aux paragraphes précédents.

La ligne HCI n'est pas la vraie courbe des pressions, car elle ne demeure dans l'épaisseur de la voûte que dans sa partie supérieure, et en sort dans le bas. Son écart maximum a lieu, pour le demi-arc de gauche, à l'intérieur du septième joint et à l'extérieur du premier, et, pour le demi-arc de droite, à l'intérieur du sixième joint. On doit donc faire un nouveau calcul pour ces trois points, au moyen des équations (10), (11), (12) du paragraphe précédent.

Les coordonnées des trois points et les autres quantités à considérer sont :

$g_1=5,28$; $h_1=4,55$;
$g_2=4,90$; $h_2=3,71$;
$g_3=0,94$; $h_3=0,09$.
$p_1=3,29$; $P_1=147,84$; $t_1=2,25$; $T_1=35,81$.
$p_2=2,79$; $P_2=101,28$; $t_2=1,62$; $T_2=18,51$.
$p_3=0,47$; $P_3=\ 18,98$; $t_3=0,05$; $T_3=\ 0,58$.

D'où :

$$a_1 = g_1 - p_1 = 5{,}28 - 3{,}29 = 1{,}99\,; \qquad e_1 = h_2 - h_3 = 3{,}71 - 0{,}09 = 3{,}62.$$
$$a_2 = g_2 - p_2 = 4{,}90 - 2{,}79 = 2{,}11\,; \qquad e_2 = h_1 - h_3 = 4{,}55 - 0{,}09 = 4{,}46.$$
$$a_3 = g_3 - p_3 = 0{,}94 - 0{,}47 = 0{,}47\,; \qquad e_3 = h_1 - h_2 = 4{,}55 - 3{,}71 = 0{,}84.$$
$$d_1 = g_2 + g_3 = 4{,}90 + 0{,}94 = 5{,}84\,; \qquad c_1 = h_1 - t_1 = 4{,}55 - 2{,}25 = 2{,}30.$$
$$d_2 = g_1 - g_3 = 5{,}28 - 0{,}94 = 4{,}34\,; \qquad c_2 = h_2 - t_2 = 3{,}71 - 1{,}62 = 2{,}09.$$
$$d_3 = g_1 + g_2 = 5{,}28 + 4{,}90 = 10{,}18\,; \qquad c_3 = h_3 - t_3 = 0{,}09 - 0{,}05 = 0{,}04.$$

et ensuite :

$$P = \frac{e_1\,(a_1P_1 + c_1T_1) - e_2\,(a_2P_2 + c_2T_2) + e_3\,(a_3P_3 + c_3T_3)}{e_2d_3 - e_3d_2}$$
$$= \frac{3{,}62\,(1{,}99 \times 147{,}84 + 2{,}30 \times 35{,}81) - 4{,}46\,(2{,}11 \times 101{,}28 + 2{,}09 \times 18{,}51)}{4{,}46 \times 10{,}18 - 0{,}84 \times 4{,}34}$$
$$\frac{+0\,84\,(0{,}47 \times 18{,}98 + 0{,}04 \times 0{,}58)}{4{,}46 + 10{,}18 - 0{,}84 \times 4{,}34} = 5{,}4.$$

$$Q = \frac{d_1\,(a_1P_1 + c_1T_1) + d_2\,(a_2P_2 + c_2T_2) - d_3\,(a_3P_3 + c_3T_3)}{e_2d_3 - e_3d_2}$$
$$= \frac{5{,}84\,(1{,}99 \times 147{,}84 + 2{,}30 \times 35{,}81) + 4{,}34\,(2{,}11 \times 101{,}28 + 2{,}09 \times 18{,}51)}{4{,}46 \times 10{,}18 - 0{,}84 \times 4{,}34}$$
$$\frac{-10{,}18\,(0{,}47 \times 18{,}98 + 0{,}04 \times 0{,}58)}{4{,}46 \times 10{,}18 - 0{,}84 \times 4{,}34} = 78{,}1.$$

$$q = h_1 - \frac{a_1P_1 + c_1T_1 - g_1P}{Q}$$
$$= 4{,}55 - \frac{1{,}99 \times 147{,}84 + 2{,}30 \times 35{,}81 - 5{,}28 \times 5{,}4}{78{,}1} = 0{,}044.$$

En composant ces grandeurs $P = CE'$ et $Q = CD$, on obtient la grandeur de la force $S = CF'$ et sa direction $F'C'G'$. La courbe des pressions $H'C'K'$ ainsi construite demeure, dans toute son étendue, dans l'épaisseur de la voûte et doit être ainsi considérée comme la véritable.

Si l'on veut cependant tenir compte de ce fait, que la voûte doit supporter une charge considérable, et qu'ainsi la vraie courbe des pressions ne peut être tangente aux courbes-contours et doit rentrer plus ou moins dans l'épaisseur, eu égard à la résistance des voussoirs, on conçoit facilement qu'en employant des matériaux peu résistants la courbe des pressions sorte de la voûte plutôt à droite qu'à gauche, en sorte que la voûte ne présente plus la stabilité requise : c'est ce qui est arrivé effectivement lors de l'exécution du

remblai sur le pont qui nous sert d'exemple, dans les conditions d'avancement de la charge décrites ci-dessus.

SECTION B.

ÉQUILIBRE DE GLISSEMENT.

§ 56. Vérification de la stabilité d'un arc par rapport au glissement.

La courbe des pressions correspondant au minimum de la poussée a été déterminée au point de vue exclusif de la rotation; si les angles faits par les résultantes des pressions sur les joints avec les plans de joints sont partout inférieurs à l'angle φ du frottement qui correspond à la matière des voussoirs, il n'y a aucun danger de destruction de la voûte par glissement de certains voussoirs suivant les plans de joints, et la courbe dont il s'agit représente bien en réalité la courbe existante des pressions. Si, au contraire, parmi ces angles, quelques-uns dépassent l'angle du frottement, la courbe déterminée au point de vue exclusif de la rotation des voussoirs autour de leurs arêtes, et donnant à ce point de vue le minimum de la poussée, ne saurait être la véritable. La poussée vraie sera nécessairement plus grande que le minimum obtenu pour la rotation, et la question est de savoir si, dans le nombre infini des courbes des pressions encore possibles, c'est-à-dire qui demeurent tout entières dans l'épaisseur de la voûte, et qui donnent une poussée horizontale plus grande, il y en a une ou plusieurs qui remplissent la condition indispensable que les angles des pressions sur les joints ne dépassent pas l'angle du frottement. S'il existe des courbes satisfaisant à cette condition, la voûte est stable, et la vraie courbe est celle qui satisfait avec la moindre poussée à la condition précédente. En général, il y a une infinité de ces courbes qui donnent une seule et même poussée horizontale, et l'on ne peut déterminer laquelle est la vraie courbe des pressions.

Lorsque la courbe déterminée au point de vue de la rotation ne peut convenir, la recherche exacte des conditions d'équilibre, eu égard au glissement, est plus difficile pour un arc dyssymétrique que

pour un arc composé de deux moitiés égales concourantes; dans le premier, en effet, les changements possibles de la résistance de la culée ne se rapportent pas seulement, comme dans le second, aux changements du point d'application et de la composante horizontale de chaque réaction de culée, mais encore aux changements possibles de la composante verticale de la réaction.

Cependant, si la dimension des joints de culée est faible par rapport à l'ouverture de l'arc, et si la ligne qui réunit les milieux des joints de culée est peu inclinée sur l'horizon, ce qui est le cas général, les variations des composantes verticales ne pourront être considérables, et l'on peut les négliger. Dans cette hypothèse, on n'a plus à faire varier que la grandeur et le point d'application de la poussée; il en résulte que toutes ces courbes ont leur point le plus haut en un seul et même joint, où la pression est horizontale et égale à la poussée; on peut ainsi, en partant de ce joint, construire de chaque côté, de proche en proche, la courbe des pressions par les principes connus, qu'on a déjà indiqués pour l'équilibre de glissement dans les arcs à moitiés symétriques.

On reconnaît alors les faits suivants :

Quand la courbe qui répond au minimum de la poussée, au point de vue de la rotation, introduit en quelque point une pression d'après laquelle il se produirait un glissement d'un voussoir sur celui immédiatement inférieur, *de dedans en dehors,* la voûte ne peut rester en équilibre.

Quand, en un ou plusieurs points, une pierre doit glisser sur l'inférieure *de dehors en dedans,* l'équilibre est possible, pourvu que la poussée horizontale nécessaire pour empêcher le glissement, c'est-à-dire pour ramener les directions des pressions dans les limites de l'angle du frottement, ne dépasse pas le maximum compatible avec l'équilibre de rotation, et pourvu que cette poussée n'ait pas pour effet de chasser de dedans en dehors d'autres voussoirs. L'équilibre ainsi obtenu, quand il est possible, correspond à un nombre infini de courbes de pression qui répondent bien à la même valeur de la poussée, mais qui diffèrent par leurs extrémités et par l'ensemble de leur figure.

Dans la pratique, la considération de l'équilibre de glissement a peu d'importance, parce que les matériaux ordinaires sont assez rugueux pour écarter tout danger de destruction par glissement. Le moyen le plus simple et le plus efficace de s'opposer à une sem-

blable destruction, quand l'équilibre de rotation est d'ailleurs assuré, mais que l'angle des pressions sur les normales aux joints dépasse en certains points l'angle du frottement, consiste à changer convenablement la direction des joints : il faut toutefois que ce changement ne soit pas tel, qu'il en résulte une notable altération de la courbe des pressions qui répond au minimum de poussée au point de vue de la rotation.

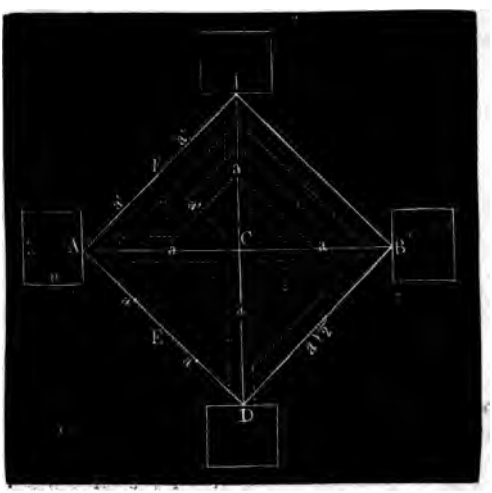
SECTION C.

THÉORIE DES VOUTES D'ARÊTE, DES VOUTES EN ARC DE CLOÎTRE, DES COUPOLES ET DES CINTRES.

§ 57. Principes de la théorie des voûtes d'arête.

La théorie des voûtes d'arête découle des mêmes principes qui servent de base aux voûtes en berceau considérées jusqu'ici. Nous nous dispenserons d'étudier complétement cette théorie, nous restreignant aux principes les plus utiles en pratique.

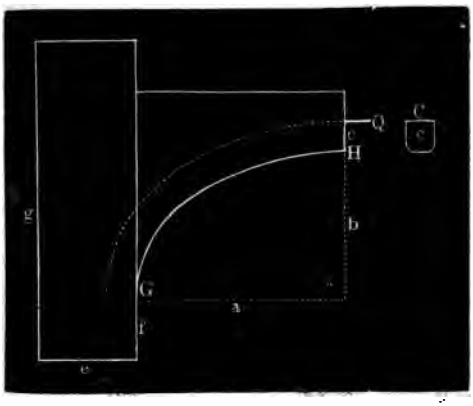
Fig. 93.



Divisons chacune des deux calottes, avec sa charge entre les arêtiers saillants, en arcs élémentaires qui s'appuient par leurs extrémités contre ces arêtiers. On peut facilement éprouver, d'après ce qui précède, la stabilité d'un semblable élément de voûte, et évaluer la pression qu'il exerce sur l'arêtier. Celui-ci supporte une semblable pression de chaque côté; on prend la résultante de ces deux pressions, qui sera généralement oblique et pourra être décomposée en forces verticale et horizontale.

Toutes ces composantes, auxquelles se joignent les poids des voussoirs de l'arêtier, forment un système de charges horizontales et verticales, qui peuvent être employées pour l'évaluation de la stabilité de l'arêtier, suivant la méthode déjà exposée dans le présent chapitre.

Fig. 94.



En pratique, on procédera comme il suit.

En adoptant des notations analogues à celles du paragraphe 22, appelons:

1° Pour l'arêtier (AB du plan, fig. 93; GH de l'élévation, fig. 94),

a la demi-ouverture,

b la hauteur intérieure de l'arc,

c l'épaisseur verticale à la clef,

C la section de l'arc à la clef en mètres carrés (cette figure est, en général, non un rectangle, mais un polygone),

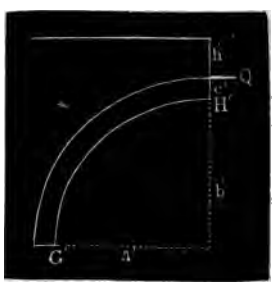
Q la poussée horizontale à la clef,

$\frac{Q}{c}$ la poussée moyenne par mètre carré,

P le poids du quart de la voûte d'arête avec sa charge (AECF du plan),

M le moment de ce poids par rapport à la naissance G de l'intrados de l'arêtier,

Fig. 95.



T la résultante de toutes les forces horizontales que les deux calottes (ADC, AIC du plan) exercent contre le demi-arêtier AC, ou la résultante des poussées de ces calottes,

N le moment de cette force par rapport au point G,

e l'épaisseur de la culée, mesurée en G,

f la hauteur de la culée, y compris les fondements, mesurée au-dessous de la naissance,

g la hauteur totale de la culée,

k l'épaisseur de la culée normalement au plan de l'arêtier,
n le coefficient de stabilité de la culée;
2° Pour la calotte dans sa plus grande ouverture (AD du plan, . 93; G'H' de l'élévation, fig. 95),
$a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ la demi-ouverture,
b' la hauteur intérieure de l'arc (ordinairement égale à a'),
c' l'épaisseur de la voûte,
h' la hauteur de la charge de la voûte d'arête au-dessus de la f, considérée comme arasée horizontalement, et réduite au poids cifique des voussoirs de la calotte,
Q' la poussée horizontale au sommet pour le bandeau G'H' de la otte, pris avec une largeur déterminée,
P' le poids du demi-arc G'H' avec sa charge,
M' le moment de ce poids par rapport au point G'.
On a, pour ce bandeau extérieur :

$$P' = \frac{a'b'}{3} + a'(c' + h') + c'(b' + c' + h'); \qquad (1)$$

$$M' = \frac{a'^2 b'}{12} + \frac{a'^2}{2}(c' + h') - \frac{c'^2}{2}(b' + c' + h'); \qquad (2)$$

$$Q' = \frac{M'}{b' + c'}. \qquad (3)$$

On peut évaluer, si c'est nécessaire, l'épaisseur c' de la calotte au nt de vue de la résistance des matériaux, comme on l'a vu au paraphe 22. Cette épaisseur, calculée pour la plus grande ouverture , suffit évidemment aussi pour tout autre élément de la calotte qu'en C.

Pour un autre bandeau élémentaire quelconque, parallèle à AD, gné du centre C de la voûte d'une quantité x' dans la direction on peut poser approximativement, en changeant dans (1) a' x' et b' en $\frac{b'x'}{a'}$, et admettant que Q' conserve sensiblement la me valeur :

$$P'' = \frac{b'x'^2}{3a'} + (c' + h')x' + c'\left(\frac{b'x'}{a'} + c' + h'\right) \qquad (4)$$

$$Q'' = Q' \qquad (5)$$

En ce qui concerne l'arêtier, les poids verticaux que les deux ttes ADC, AIC transmettent au demi-arêtier AC, poids repré-

sentés par l'équation (4), donnent par leur somme le poids du quart de voûte d'arête AECF. Ce poids

$$P=\frac{2a'^2b'}{9}+a'^2(c'+h')+a'c'\left[b'+2(c'+h')\right]. \quad (6)$$

Le moment par rapport au point (A, G) de ce poids est l'intégrale, entre les limites $x'=0$ et $x'=a'$, des moments des poids des bandeaux élémentaires d'épaisseur dx'. Or deux bandeaux élémentaires concourant sur l'arêtier ont ensemble un poids $2P''dx'$, dont le moment est $2\,a\left(1-\frac{x'}{a'}\right)P''dx'$: d'où le moment total

$$M=aa'\left[\frac{a'b'}{18}+\frac{a'}{3}(c'+h')+c'\left(\frac{b'}{3}+c'+h'\right)\right]. \quad (7)$$

Quant à la pression horizontale des calottes contre l'arêtier, les deux pressions $Q''=Q'$, provenant des deux calottes concourantes, se réunissent en une seule $Q'\sqrt{2}$, agissant dans la direction CA. Si l'on admet que ces forces soient uniformément distribuées sur la droite GH, on aura pour leur somme

$$T=aQ'=\frac{a}{b'+c'}\left[\frac{a'^2b'}{12}+\frac{a'^2}{2}(c'+h')-\frac{c'^2}{2}(b'+c'+h')\right], \quad (8)$$

et pour leur moment, par rapport au point G,

$$N=\frac{b}{2}T=\frac{ab}{2(b'+c')}\left[\frac{a'^2b'}{12}+\frac{a'^2}{2}(c'+h')-\frac{c'^2}{2}(b'+c'+h')\right]. \quad (9)$$

Par rapport à l'extrémité extérieure de la base de la culée, le moment de la force horizontale T,

$$fT+N=\frac{a}{b'+c'}\left(f+\frac{b}{2}\right)\left[\frac{a'^2b'}{12}+\frac{a'^2}{2}(c'+h')-\frac{c'^2}{2}(b'+c'+h')\right]. \quad (10)$$

La poussée Q de l'arêtier est donnée par $(b+c)\,Q=M-N$, d'où

$$Q=\frac{M-N}{b+c}. \quad (11)$$

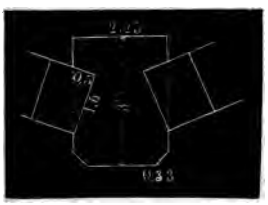
Les équations (7) et (9) permettent ainsi de calculer Q. $\frac{Q}{c}$ donne ensuite la pression par mètre carré au joint de la clef.

Pour calculer, dans un cas particulier, la hauteur verticale c de la section C de l'arêtier et cette section elle-même, on prendra, d'après les analogies de la pratique, deux valeurs approximatives de c et C, et on calculera, par l'équation (11), Q et $\frac{Q}{c}$. On cherchera ensuite dans la table du paragraphe 22, à la colonne de la poussée, la valeur de Q, et on vérifiera si la valeur de la poussée par mètre carré, $\frac{Q}{c}$, concorde avec celle portée à la quatrième colonne. S'il n'en est pas ainsi, on corrigera les valeurs de c et C, et on verra facilement dans quel sens il faut les faire varier.

Si la voûte n'a pas d'arêtiers distincts, comme il arrive dans les voûtes communes en briques, il n'y a naturellement plus à s'occuper de ces pièces, et ce qui précède est sans application. Mais cette circonstance ne modifie pas ce que nous allons dire maintenant sur les épaisseurs de culée.

Exemple. On veut couvrir, au moyen d'une voûte d'arête, un espace libre carré de $7^m,54$ de côté, ayant à ses quatre angles des piliers de $2^m,20$ de hauteur. La voûte doit être à arêtiers saillants et calottes demi-circulaires, et porter une charge de $1^m,26$ sur la clef : trouver les dimensions de l'arêtier et des piliers.

Fig. 96.



Les nombres à employer ici sont :

$a = 5^m,34$; $b = 3,77$; $a' = b' = 3,77$; $h' = 1,26$ et $c' = 0,47$, d'après le paragraphe 22.

Supposons, en outre, que la hauteur c de la section de l'arêtier soit égale à $0^m,94$ sur toute son étendue, et sa largeur à $0^m,71$, en sorte que la section de l'arêtier C est (fig. 96)

$$0,71 \times 0,94 - (0,47 \times 0,16 + 0,105 \times 0,105) = 0^{mq},58.$$

Les équations (1), (2), (3) donnent :

$$P' = 14,0 ; \; M' = 16,1 ; \; Q' = 3,8.$$

Les équations (6), (7), (8), (9) et (11) donnent ensuite :

$$P = 159 ; \; M = 280 ; \; T = 65 ; \; N = 122 ; \; Q = 33,9.$$

Ainsi la pression par mètre carré à la clef est :

$$\frac{Q}{C} = \frac{33,9}{0,58} = 18,12 ;$$

la table du paragraphe 22 donne en regard de cette pression une épaisseur de $0^m,98$. Cette épaisseur diffère peu de celle que nous nous sommes donnée ; on peut donc conserver la première sans correction.

On obtient l'épaisseur e de la culée de l'arêtier d'une voûte d'arête par l'équation approximative des moments :

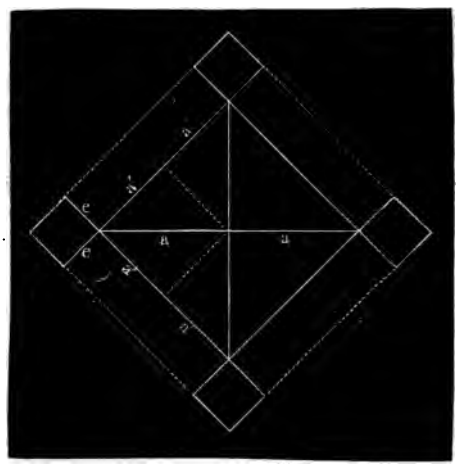
$$n(f+b+c)\,Q = \tfrac{1}{2}e^2gk + eP + M - (fT+N). \qquad (12)$$

D'où il suit :

$$e = \frac{1}{gk}\left\{-P + \sqrt{2gk\,[n(f+b+c)\,Q + fT + N - M] + P^2}\right\}. \qquad (13)$$

Les quantités P, Q, M et $fT+N$ ont là les valeurs tirées de (6), (11), (7), (10). Il sera convenable de ne pas donner au coefficient de stabilité n une valeur plus petite que 3 ; en effet, ces culées, qui sont généralement des piliers libres, sans butée, reçoivent la poussée réunie de toutes les parties de la voûte.

Fig. 97.



Exemple. Dans l'exemple actuel, la hauteur f du pilier est, en y comprenant la fondation, de $2^m,20$, et sa hauteur totale g est de $8^m,16$; l'épaisseur k, dans la direction normale au plan de l'arêtier, égale la largeur de l'arêtier, soit $0^m,71$. En faisant le coefficient $n=3$, l'équation (13) donne $e=3^m,58$. Pour une largeur de piliers $k=1^m,26$, $1^m,88$, $2^m,51$, on aurait pour e respectivement 3,29 ; 2,98 ; 2,73.

Si, comme cela a lieu généralement, les culées ont la position (fig. 97) parallèle aux têtes de la voûte et une base carrée de côté e, on doit substituer dans l'équation (12), comme moment de la culée, $\sqrt{\tfrac{1}{2}}.e^3g = 0{,}707.\,e^3g$ au lieu de $\tfrac{1}{2}\,e^2gk$, et dans le second membre

$\sqrt{2}.\ e = 1,414.\ e$ au lieu de e. On obtient ainsi l'équation du troisième degré

$$n(f+b+c)\,Q = 0,707.\ ge^3 + 1,414.\ eP + M - (fT + N)\ (14).$$

Dans ce cas, on couvre ordinairement l'espace compris entre deux culées consécutives par des voûtes en berceau de $2a'$ d'ouverture et b' de hauteur, qui encadrent la voûte d'arête.

Les quantités eP', eM', eQ' représentent le poids et le moment d'une de ces demi-voûtes et sa poussée contre le côté correspondant de la culée. Ces deux forces eQ', perpendiculaires l'une à l'autre, ont une résultante $eQ'\sqrt{2}$. On doit ajouter au premier membre de l'équation (14) le moment de cette résultante multipliée par n, par rapport au point inférieur de la culée, soit $1,414.\ n\,(f+b'+c')\,eQ'$.

Les deux forces eP' se composent en une seule, $2eP'$, dont le bras de levier est

$$\frac{3e}{2\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}},$$

et le moment :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}e^2P' + \sqrt{2}.\ epP' = 2,121.\ e^2P' + 1,414.\ eM'.$$

On doit ajouter ces deux termes au deuxième membre de l'équation (14).

Cette équation, ainsi complétée, devient :

$$\begin{aligned} &n\,(f+b+c)\,Q + 1,414.\ n\,(f+b'+c')\,e\,Q' \\ &= 0,707.\ ge^3 + 1,414,\ eP + M + 2,121.\ e^2P' + 1,414.\ eM' \\ &\qquad - (fT + N), \qquad (15) \end{aligned}$$

dans laquelle P, Q, M, $(fT+N)$, P', Q', M', ont les valeurs (6), (11), (7) (10), (1), (3), (2). Cette équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} &g\,e^3 + 3\,P'e^2 + 2\left[P + M' - n\,(f+b'+c')\,Q'\right]e \\ &- 1,414.\ \left[n\,(f+b+c)\,Q + (fT+N) - M\right] = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Pour éviter la résolution exacte de cette équation du troisième

degré, on peut employer la règle de fausse position. Soient e_1, e_2 deux valeurs approchées de e et F_1, F_2 les valeurs correspondantes du premier membre de l'équation (16), lequel devrait être nul si la valeur de e était exacte ; supposons que F_2 soit plus près de zéro que F_1, c'est-à-dire que sa valeur absolue soit moindre que celle de F_1, en sorte que e_2 est une valeur plus approchée que e_1. Alors l'expression

$$e_3 = \frac{e_2 F_1 - e_1 F_2}{F_1 - F_2}$$

est une valeur plus approchée de e que ne l'est e_2.

Si l'on veut une plus grande approximation, on recommence le calcul avec les deux valeurs approchées e_2, e_3, qui donnent F_2, F_3 ; d'où la nouvelle approximation :

$$e_4 = \frac{e_3 F_2 - e_2 F_3}{F_2 - F_3}.$$

Exemple. Appliquons ces formules au cas ci-dessus et substituons les valeurs calculées plus haut dans l'équation (14) ; prenons le coefficient $n = 3$: on doit avoir

$$e^3 + 12{,}2.\ e - 36{,}9 = 0,$$

d'où $e = 2^m{,}19$, dans le cas où les espaces entre les culées ne sont pas recouverts.

Si ces espaces sont recouverts, on aura recours à l'équation (16), qui devient

$$e^3 + 5{,}08.\ e^2 - 1{,}22.\ e - 36{,}9 = 0,$$

d'où $$e = 2^m{,}31.$$

Si dans l'équation (15) on supprime d'un côté $n\ (f + b + c)Q$, de l'autre les termes $1{,}414.\ eP$, M et $-(fT + N)$, on obtient $1{,}414.\ n\ (f + b' + c')\ Q' = 0{,}707.\ g\ e^2 + 2{,}121.\ eP' + 1{,}414.\ M'$, équation qui convient à la détermination des culées des quatre berceaux qui relient les piliers, en ne tenant pas compte de la voûte d'arête, et qui donne $e = 1^m{,}98$.

La culée d'un simple berceau décrit avec une ouverture de $7^m{,}54$, comme ces voûtes d'encadrement, exigerait, pour travailler sous le

coefficient de stabilité $n=3$, une épaisseur de $2^m,42$, d'après le paragraphe 23.

Ainsi quand on adopte le coefficient de stabilité $n=3$, une voûte d'arête ne donne pas lieu à des culées plus épaisses que le simple berceau. Il n'en est pas de même quand on considère la limite de l'équilibre ($n=1$) : dans ce cas, notre voûte d'arête sans encadrement exige (équ. 14) $e=0^m,91$; la voûte d'arête avec encadrement (16) $e=0^m,78$; l'encadrement sans la voûte d'arête (17) $e=0^m,38$; enfin un simple berceau $e=0^m,52$.

En comparant ces diverses valeurs de e, il peut paraître étonnant que, dans tous les cas, l'épaisseur de culée d'un pilier isolé, sur lequel agissent à angle droit deux berceaux d'encadrement, soit inférieure à l'épaisseur de culée qu'exigerait un simple berceau, ou l'un de ces berceaux d'encadrement, s'il agissait seul. La raison en est que, dans le premier cas, la composition des forces en diagonales conduit à multiplier le moment de résistance de la culée par $\sqrt{2}=1,414$, le moment des poussées horizontales nuisibles par le même coëfficient, mais en même temps le moment des forces verticales utiles par le coefficient plus grand $\frac{3}{\sqrt{2}}=2,121$.

Pour l'équilibre limite, nous avons trouvé que notre voûte d'arête avec encadrement exige une épaisseur $e=0,78$, et le berceau simple de même ouverture $e=0,52$. Ainsi, pour l'équilibre limite, la culée de la voûte d'arête a une fois et demie l'épaisseur de la culée du berceau. Ce résultat (qui, comme nous l'avons vu, se modifie pour d'autres valeurs du coefficient de stabilité) trouve une remarquable confirmation dans les expériences pratiques faites sur des modèles par Rondelet, et rapportées par cet auteur dans l'*Art de bâtir* (liv. IX, sect. VI, chap. II). On y lit, en effet, que, pour l'équilibre limite et sous la même ouverture, les épaisseurs des culées des coupoles, des arcs de cloître, des berceaux et des voûtes d'arête sont entre elles, approximativement, comme les nombres 1, 3, 4 et 6.

§ 58. Principes de la théorie des arcs de cloître.

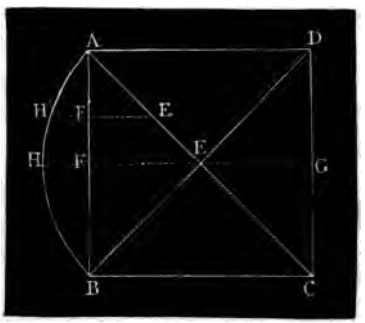
Dans un arc de cloître ABCD (fig. 98), la plus grande poussée répond à la section de la calotte, normale aux génératrices, et passant

par l'horizontale FE. On calculera par conséquent l'épaisseur des calottes par les règles qui déterminent celle de l'arc FE, considéré comme partie d'un berceau simple.

Si les arêtes AC, BD sont dessinées par des arceaux d'encadrement, ce qui n'a pas lieu ordinairement, ces arceaux n'exigeront pas plus d'épaisseur que s'ils travaillaient sous leur poids et leur charge propre ; car la pression des calottes se transmet dans le massif même jusqu'aux culées, de telle sorte que les arêtiers n'en soient nullement affectés.

En ce qui concerne les culées, on réalisera le plus d'économie possible en déterminant à chaque point F, F′ l'épaisseur FH, F′H′, qui correspond aux poussées des arcs FE, F′E′, qui s'y appuient directement. Les épaisseurs de ces arcs FE, F′E′ eux-mêmes se déterminent par les règles connues.

Fig. 98.



Ce mode d'opérer conduit à une ligne courbe AHB pour la limite postérieure de la culée. Si l'on ne veut pas accepter cette forme dans l'application, il faudra composer ensemble toutes les pressions des bandeaux élémentaires de la demi-calotte AFE et calculer l'épaisseur d'une culée à base rectangle, de longueur AF, résistant à ces forces, dont les moments se calculent facilement.

Soit en effet :

a la demi-ouverture FE du bandeau du milieu,
b sa hauteur intérieure ou sa flèche,
c son épaisseur en E,
h sa charge en E,
P le poids de la demi-calotte AFE,
M le moment de ce poids par rapport à l'arête AB des naissances,
Q la poussée horizontale de la demi-calotte,
q la hauteur de cette poussée au-dessus des naissances,
e l'épaisseur de la culée,
f la hauteur de la culée au-dessous des naissances,
g la hauteur totale de la culée, charge comprise,
k la longueur AF de la demi-culée,
n le coefficient de stabilité.

On a (§ 23) :

$$n(f+q)\,Q = \frac{e^2gk}{2} + eP + M, \qquad (1)$$

d'où

$$e = \frac{-P + \sqrt{2gk[n(f+q)Q - M] + P^2}}{gk}. \qquad (2)$$

Si les culées ne sont pas contre-butées, on donnera au coefficient de stabilité la valeur 3.

Dans l'application, on pourra se contenter du mode abrégé que voici. Soit $e' = FH$ l'épaisseur de culée calculée d'après le paragraphe 23 pour l'arc FEG considéré comme berceau simple. Considérons ensuite l'arc HA comme une parabole qui a son sommet au point H, et transformons la figure FHA en un rectangle de même stabilité par rapport à l'arête FA. Prenant FA pour axe des x, FH pour axe des y, l'équation de la parabole est

$$y = \frac{e'}{k^2}(k^2 - x^2).$$

Le moment d'une bande élémentaire F'H' est

$$\frac{y^2dx}{2} = \frac{e'^2}{2k^4}(k^2 - x^2)^2\,dx\,;$$

et par conséquent le moment de la figure FHA est

$$\int_0^k \frac{y^2dx}{2} = \frac{4}{15}ke'^2.$$

e étant l'épaisseur du rectangle de même stabilité et $\frac{ke^2}{2}$ son moment, on doit avoir

$$\frac{ke^2}{2} = \frac{4}{15}ke'^2,$$

d'où $\qquad e = 0{,}7303.\ e$

ou sensiblement : $\qquad e = \frac{3}{4}e' \qquad (3)$

D'où il suit que la culée rectangulaire d'un arc de cloître doit être les trois quarts de celle d'un berceau simple de section droite FG : ce résultat confirme les expériences de Rondelet déjà citées au para-

graphe qui précède, et d'après lesquelles les épaisseurs de culée des coupoles, des arcs de cloître, des berceaux et des voûtes d'arête sont, à ouverture égale, comme les nombres 1, 3, 4, 6.

§ 59. Principes de la théorie des coupoles.

Les auteurs qui ont traité la question des coupoles (Navier : *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, part. I, n° 349; Rondelet : *Art de bâtir*, liv. IX, sect. VI, chap. 2, etc.) ont communément divisé la coupole en fuseaux élémentaires limités par des plans méridiens et concourant au sommet, et appliquent ensuite à ces fuseaux les mêmes principes qu'aux berceaux à charges verticales et poussées horizontales. Or ce point de départ est tout à fait erroné. Il ne fait pas connaître l'influence des forces qui agissent sur une voûte de cette nature et il implique cette condition, impossible à remplir, que les matériaux supportent au sommet une poussée finie sur une arête infiniment mince, soit une poussée infinie sur une surface finie.

Fig. 99.

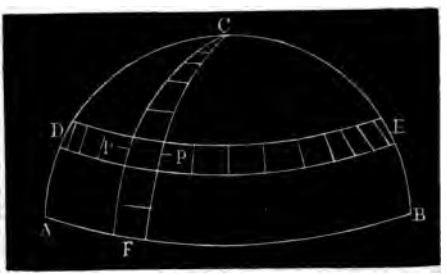
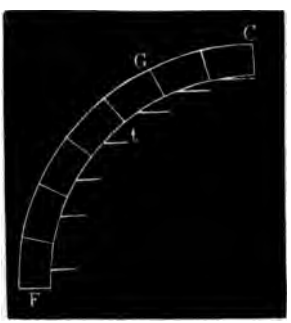


Fig. 100



Il faut au contraire diviser la coupole ABC (fig. 99) en segments concentriques DE, formés chacun d'une couronne de voussoirs reposant sur une base inclinée suivant un cône de révolution. Il faut tout d'abord examiner les conditions d'équilibre d'une semblable couronne, laquelle peut d'ailleurs former la partie supérieure d'une coupole ouverte par le haut. Il se développe dans ces couronnes des pressions horizontales p, p, dirigées normalement aux joints de la couronne, et plus intenses dans les couronnes supérieures que dans les inférieures.

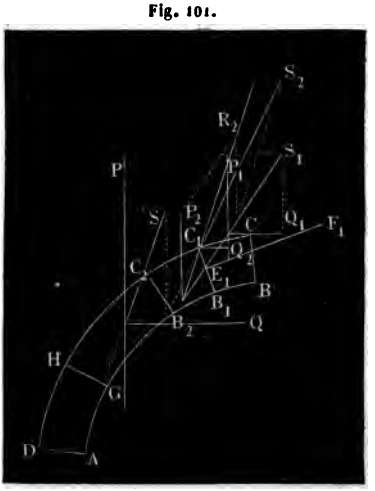
Si l'on vient ensuite à considérer le fuseau CF limité par des méridiens, il faudra composer deux forces p, p en une seule force horizontale t agissant du dedans au dehors (fig. 100).

C'est ce système de forces horizontales, réuni aux poids et aux charges du fuseau méridien, qui conduit à la théorie spéciale des coupoles, théorie que nous allons traiter dans les limites des besoins de la pratique.

Le cas général est celui de la coupole ouverte, où le fuseau FC s'arrête par le haut, non au joint vertical, mais à un joint oblique G. Il faut, dans tous les cas, que la poussée horizontale au joint supérieur soit nulle. Cela est évident pour une coupole ouverte; pour la coupole fermée, qui n'en est qu'un cas particulier, cela résulte de ce que la surface du joint au sommet se réduit à une ligne qui ne saurait supporter une pression finie. Remarquons derechef l'absurdité des théories qui supposent l'existence au joint du sommet C, comme à la clef des berceaux, d'une poussée horizontale qui doit tenir en équilibre le massif DC.

On déterminera les forces qui sollicitent les autres joints de la manière suivante : soit ABCD (fig. 101) un fuseau méridien. La poussée horizontale au joint supérieur BC est nulle. Soit B_1C_1 le second joint, P_1 le poids du voussoir BCC_1B_1, agissant au centre de gravité de ce voussoir, charge comprise; l'équilibre du voussoir exige que la direction de P_1 rencontre le joint B_1 C_1 et fasse avec la normale E_1 F_1 à ce joint un angle au plus égal à l'angle du frottement. Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas remplie, il s'établit dans la couronne dont fait partie le voussoir considéré une tension horizontale, et la résultante Q_1 des tensions qui s'exercent des deux côtés sur le voussoir doit être telle que, composée avec le poids P_1, elle donne lieu à une nouvelle résultante S_1 qui remplisse les deux conditions ci-dessus. Si, en faisant croître progressivement Q_1 l'on arrive au point inférieur B_1 du joint B_1 C_1 avant d'atteindre

Fig. 101.



l'angle du frottement, on déterminera Q_1 de telle sorte que l'angle $S_1E_1F_1$ soit égal à l'angle du frottement. Dans le cas contraire, où l'on atteint l'angle du frottement avant de rencontrer le point inférieur du joint, on déterminera Q_1 de manière que la résultante S_1 passe par l'arête inférieure B_1.

Soit B_2C_2 le troisième joint, $B_1C_1C_2B_2$ le deuxième voussoir, P_2 le poids de cette pierre avec sa charge, et R_2 la résultante de P_2 et S_1; la résultante R_2 doit satisfaire aux deux conditions ci-dessus sur le joint B_2C_2. S'il n'en est pas ainsi, il s'établit dans la deuxième couronne une tension horizontale, et la résultante Q_2 de ces pressions sur les deux faces du voussoir doit être déterminée de telle sorte que la résultante S_2 de P_2 et Q_2 remplisse les conditions dont il s'agit.

Les forces complémentaires Q_1, Q_2... doivent, d'après le principe de la moindre résistance, n'être pas plus grandes qu'il n'est nécessaire pour l'équilibre ; on doit donc les prendre minimums, et pour cela les considérer comme passant par les points supérieurs des joints, C, C_1, C_2...

En continuant la même opération, on arrivera enfin, pour les coupoles de profil usuel, à un joint GH, sur lequel il n'est plus nécessaire de supposer une tension horizontale de la couronne qu'il supporte, ni par conséquent une force telle que Q_1, Q_2. Ce même fait se reproduira à plus forte raison pour tous les joints inférieurs à GH ; pour ces joints il pourra arriver au contraire que la résultante S sorte de l'épaisseur du joint vers l'extrados, ou s'incline sur la normale, au-dessous d'elle, d'une quantité plus grande que l'angle du frottement : dans ces deux cas la coupole est instable et se détruira soit par rotation ou par glissement.

Si l'on compose toutes les forces horizontales Q_1, Q_2... jusqu'au joint GH, leur somme est la poussée horizontale qu'exerce le fuseau méridien sur la culée, et le moment de cette force fournit l'un des membres de l'équation des moments d'où l'on déduit l'épaisseur de la culée.

Le joint GH, auquel répond la plus grande poussée horizontale, porte aussi dans la coupole le nom de *joint de rupture ;* c'est en effet à l'arête intérieure G de ce joint que la courbe des pressions vient rencontrer le contour de la voûte dans le cas d'instabilité par rapport à la rotation ; et, dans le cas d'instabilité par rapport au glissement, c'est sur ce joint que la pression S fait avec la normale l'angle du frottement.

La pression horizontale telle que Q_1, Q_2..., qui agit sur un voussoir élémentaire d'angle ψ infiniment petit, est proportionnelle à ψ et peut ainsi être mise sous la forme $Q_1 = q_1\,\psi$, $Q_2 = q_2\,\psi$... Or décomposons cette force, qui est dirigée suivant le rayon du parallèle, en deux forces horizontales, normales respectivement aux deux parois du fuseau méridien. Chacune de ces deux composantes sera égale, comme on le voit immédiatement sur la figure, à

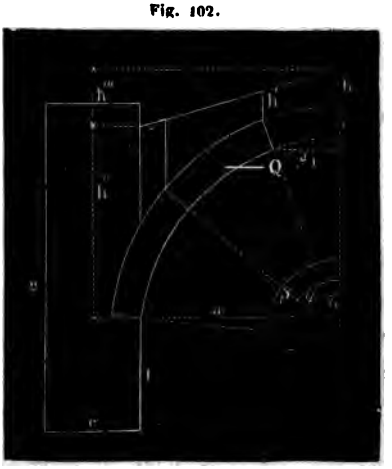
$$\frac{\frac{1}{2}Q_1}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)},$$

ou, comme ψ est infiniment petit, égale $\frac{Q_1}{\psi}$ ou q_1. Ainsi $q_1 = \frac{Q_1}{\psi}$, $q_2 = \frac{Q_2}{\psi}$... sont les pressions horizontales réciproques des voussoirs dans une même couronne soumise à la poussée centrifuge Q_1, ou Q_2... Soit ε l'épaisseur, mesurée au cercle de naissance dont le rayon est a, du fuseau auquel se rapporte la poussée Q_1, Q_2...: $\psi = \frac{\varepsilon}{a}$.

Les pressions réciproques dans une même couronne sont donc respectivement $q_1 = \frac{aQ_1}{\varepsilon}$, $q_2 = \frac{aQ_2}{\varepsilon}$...

On peut, dans la pratique, déduire l'épaisseur de la voûte de la pression normale qu'exerce la coupole sur sa base AD. La table du paragraphe 22 donnera dans sa troisième colonne la fraction de cette pression qui peut agir sur la base d'un fuseau d'un mètre de largeur sur le cercle des naissances ; en d'autres termes, on aura le nombre de mètres carrés de base nécessaire pour supporter la pression normale sur la base, en ayant soin de ne pas dépasser la pression par mètre carré que donne la cinquième colonne de la même table.

Fig. 102.



Proposons-nous maintenant de déterminer, avec une approximation suffisante pour la pratique, les forces et dimensions nécessaires. Soit (fig. 102) : a la demi-ouverture de la coupole,

b la hauteur intérieure de la coupole supposée fermée (ordinairement $b = a$),

α l'angle du joint supérieur avec la verticale (si la coupole est fermée, $\alpha = 0$),

β l'angle du joint inférieur avec la verticale (si la coupole est hémisphérique, $\beta = 90$ degrés),

a' le rayon du cercle intérieur de l'ouverture au sommet de la coupole,

b' la distance verticale de ce cercle au sommet de l'intrados supposé fermé,

c l'épaisseur de la voûte,

h la hauteur de la charge qui surmonte le sommet de la voûte, réduite au poids spécifique des voussoirs,

h', h'', h''' les hauteurs de cette charge au-dessus du joint supérieur et du joint de naissance, mesurées comme l'indique la figure,

φ l'angle du joint de rupture avec la verticale,

Q la poussée horizontale pour un fuseau d'un mètre d'épaisseur, prise perpendiculairement au plan de la figure, sur le cercle de naissance,

N le moment de Q par rapport à la naissance,

P le poids de ce fuseau,

M le moment de P par rapport à la naissance,

e l'épaisseur de la culée, mesurée à partir de l'intrados,

f la hauteur de la culée et de sa fondation au-dessous de la naissance,

g la hauteur totale de la culée,

n le coefficient de stabilité.

Le poids de la coupole pleine est, en considérant la courbe d'intrados comme une parabole, $\pi a^2 (h'' + \frac{1}{3} h''' - \frac{1}{2} b)$. Pour l'orifice supérieur, qui sera toujours petit, on peut retrancher $\pi a'^2 (h + c)$. En divisant le résultat par $2\pi a$, on aura le poids du fuseau élémentaire ci-dessus défini :

$$P = \frac{1}{2a} \left[\left(h'' + \frac{h'''}{3} - \frac{b}{2}\right) a^2 - (h + c)\, a'^2 \right] \qquad (1)$$

Le moment de P s'obtient ainsi. A une distance horizontale x

du sommet, le massif de la voûte avec sa charge a une hauteur verticale égale à

$$h+c+\frac{bx^2}{a^2}-\frac{h'''x}{a}.$$

L'épaisseur du fuseau au même point est $\frac{x}{a}$, en sorte que le moment d'un élément du fuseau est

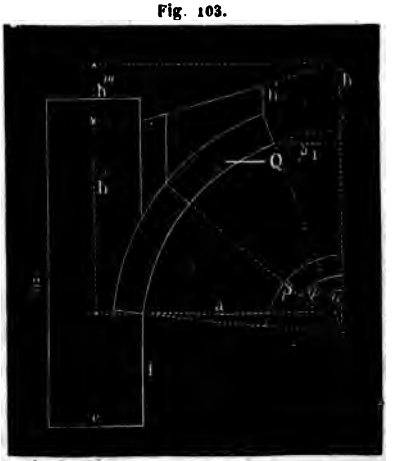
$$\left(h+c+\frac{bx^2}{a^2}-\frac{h'''x}{a}\right)\frac{x^2}{a}\,dx.$$

En intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, et retranchant le moment du segment enlevé à l'orifice supérieur, soit sensiblement $\frac{h+c}{3}.\frac{a'^3}{a}$, on a le moment de P par rapport au sommet. On en déduira le moment par rapport à la naissance en retranchant le nombre précédent de aP. Ainsi

$$M=aP-\left(\frac{h+c}{3}+\frac{b}{5}-\frac{h''}{4}\right)a^2+\frac{h+c}{3}.\frac{a'^3}{a}. \qquad (2)$$

Cette formule s'éloigne plus de la vérité que la formule approchée analogue pour les berceaux, et n'est qu'une assez grossière approximation. On aura d'ailleurs, si l'on veut, et avec facilité, les valeurs exactes de P et de M par des constructions graphiques et le calcul de petits tableaux, ainsi que nous l'avons déjà fait mainte fois plus haut et que nous le montrerons encore plus bas par des exemples.

Fig. 103.



On fera un calcul analogue pour déterminer les forces horizontales Q_1, Q_2, Q_3, puis leur résultante Q et son moment N par rapport à la naissance. Ayant ainsi P, Q, M, N, on déduira l'épaisseur e de la culée de l'équation des moments

$$n\,(fQ+N)=\frac{e^2g}{2}+eP+M.$$

Dans cette équation on néglige la différence de largeur de la face

postérieure concentrique de la culée par rapport au cylindre des naissances. Cette différence est favorable à la stabilité. On a donc :

$$e = \frac{-P + \sqrt{2g\,[n\,(fQ + N) - M] + P^2}}{g}. \qquad (3)$$

Comme les culées des coupoles sont ordinairement hautes et sans butée de terre par derrière, on adoptera 3 pour coefficient de stabilité.

Si l'on veut se dispenser du calcul de tables pour déterminer les grandeurs Q et N qui entrent dans la valeur de e, on remarquera que la courbe des pressions passe non loin de l'arête intérieure de naissance, ce qui permet de poser approximativement

$$N = M. \qquad (4)$$

Si l'on admet en outre que le joint de rupture est à mi-hauteur, $\frac{b-b'}{2}$, et que la résultante horizontale Q passe par le milieu du segment supérieur au joint de rupture, ce qui établit son point d'application à une hauteur $\frac{3}{4}(b-b')$ à peu près au-dessus de la naissance, on aura :

$$\frac{3}{4}(b-b')\,Q = N = M,$$

d'où

$$Q = \frac{4M}{3(b-b')}. \qquad (5)$$

Ayant ainsi P, Q, M, N tirés de (1), (5), (2), (4), la formule (3) donnera immédiatement une valeur approchée de l'épaisseur e de la culée. Mais il vaut mieux substituer dans (3) les grandeurs obtenues par des constructions graphiques et les calculs de tables.

La poussée horizontale Q, qui s'exerce sur chaque mètre courant de la couronne inférieure des voussoirs aux naissances, est équilibrée ordinairement par la stabilité de la culée; mais on peut aussi la détruire par une bande de fer établie autour de la partie inférieure de la coupole. Cette bande doit, d'après ce qui précède, résister à une tension $\frac{aQ}{\varepsilon}$. Cette force est mesurée en mètres cubes de matériaux de densité égale à celle des voussoirs; si l'on veut l'exprimer en kilogrammes, w étant le poids d'un mètre cube de la matière

des voussoirs, la force sera $\frac{a\,Q.w}{\varepsilon}$: pour le calcaire ou le grès, on aura $w = 2400$ kilogrammes. En faisant travailler le fer forgé à 6 kilogrammes par millimètre carré ($\frac{1}{6}$ de la charge de rupture), on devra donner à la barre la section $w = \left(\frac{aQ}{2500 \times \varepsilon}\right)^{\text{mq.}}$.

Premier exemple. — Coupole ouverte en haut, avec charge supérieure.

Prenons pour exemple une voûte de $18^m,84$ d'ouverture et de $0^m,94$ d'épaisseur, avec une charge de $1^m,88$ de hauteur au-dessus du sommet, et qui s'étend obliquement jusqu'au joint de culée en s'abaissant, depuis le sommet, de $1^m,98$ (fig. XVIII à la fin du volume). L'ouverture au sommet a un rayon d'extrados de $3^m,77$ et un rayon d'intrados de $3^m,45$.

Pour le calcul des forces verticales, on partage la voûte et sa charge, comme dans les exemples précédents, en petites parties, savoir dans ce cas en sept parties, dont les six premières ont une largeur de $1^m,26$ et la dernière une largeur de $0^m,94$.

On formera les mêmes tableaux qu'on a construits dans les paragraphes précédents; on ajoutera seulement une colonne des épaisseurs des segments. On pouvait jusqu'ici supprimer cette colonne, parce qu'on considérait un bandeau d'un mètre de longueur dans le sens des génératrices, en sorte que le poids était représenté par la surface de la voûte, tandis que dans une coupole on considère des fuseaux dont l'épaisseur varie en décroissant de la naissance au sommet et devient nulle au sommet même.

En supposant l'épaisseur du fuseau sur la circonférence de naissance égale à $0^m,31$, on aura l'épaisseur du fuseau sur un parallèle quelconque en multipliant 0,31 par le rapport du rayon du parallèle au rayon du cercle de naissance.

On obtient ainsi le tableau suivant pour les forces verticales :

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES							SOMMES PARTIELLES		
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Epaisseur.	Produit.	Bras de levier.	Moment.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m.	m.	m.	m. c.	m.	m⁴	m c.	m⁴	m.
1	1,26	2,67	0,08	0,27	2,51	0.68	0,27	0,68	2,5
2	1,26	2,83	0,12	0,36	3,77	1,36	0,63	2,04	3,3
3	1,26	3,27	0,16	0,66	5,02	3,31	1,29	5,35	4,1
4	1,26	3,92	0,20	0,99	6,28	6,22	2,28	11,57	5,0
5	1,26	5,02	0,24	1,52	7,54	11,46	3,80	23,03	6,0
6	1,26	6,91	0,28	2,44	8,79	21,45	6,24	44,48	7,1
7	0,94	10,99	0,31	3,20	9,89	31,65	9,44	76,13	8,1
				9,44		76,13			

Connaissant les forces verticales, on obtiendra les forces horizontales par une construction graphique. On se souviendra que ces dernières forces sont assujetties par le principe de la moindre résistance à être des minimums : donc, dans les couronnes supérieures, lesquelles développent principalement la poussée horizonzale, la force horizontale nécessaire pour l'équilibre devra passer au point le plus haut du joint correspondant.

Dans notre épure pour l'exemple qui nous occupe, la force P_1 verticale, qui agit au centre de gravité du premier voussoir réuni à sa surcharge, ne rencontre pas le joint inférieur du premier voussoir (joint n° 1) ; il faut donc introduire une force horizontale Q_1 pour tenir ce voussoir en équilibre, et faire passer la direction Q_1 par le point le plus haut *d* du premier voussoir. L'intersection *a* des directions des forces verticale et horizontale est le point d'application de leur résultante.

On porte verticalement au-dessus du point *a* la longueur *ab*, qui représente la force P_1 de la cinquième colonne du tableau ci-dessus ; on mène par *b* une horizontale. On construit au-dessus de la normale *ef* à la direction du premier joint l'angle du frottement *gef* (dont la tangente est prise, comme précédemment, égale à 0,70). On mène par *a* une parallèle à *ge ;* cette ligne coupe le premier joint dans l'épaisseur de la voûte ; elle donne donc la direction de la résultante S_1 ; son prolongement *ac* représente la grandeur de cette force, et *bc* représente Q_1.

La force S_1 ainsi déterminée se compose ensuite avec le poids P_2 afférent au second voussoir; on fait pour cela $hi = ac$, on mène par le point i la verticale $il = P_2$; hl représente en grandeur et en direction la résultante R_2. La direction de R_2 ne rencontrant pas le deuxième joint, il faut introduire une nouvelle force horizontale Q_2, passant par le point le plus haut du premier joint et rencontrant en m la direction de R_2.

Pour déterminer cette force horizontale, on fait $mn = hl$, on mène par m la ligne mo parallèle à la ligne ep, qui fait l'angle du frottement avec la normale eq au deuxième joint. La ligne mo prolongée rencontre le deuxième joint; elle représente donc effectivement la résultante S_2 de R_2 et de Q_2, cette dernière étant représentée par no.

On composera de la même manière $S_2 = mo = rs$ avec la force verticale $P_3 = st$, ce qui donnera sur le troisième joint la résultante $R_3 = rt$, qui ne coupe pas le troisième joint : on devra donc introduire une force horizontale Q_3, dont le point d'application sera u.

Une ligne faisant avec la normale au troisième joint l'angle du frottement ne rencontre plus ce point dans l'épaisseur de la voûte; on doit donc ici faire passer la résultante S_3 des deux forces P_3 et Q_3 par le point intérieur du troisième joint et par le point u : d'où $S_3 = uv$ et $Q_3 = vw$.

On obtiendra de même les forces horizontales Q_4, Q_5 et Q_6; la résultante R_7 de P_7 et de S_6 est la première qui rencontre dans l'épaisseur de la voûte en x le joint correspondant. Dans le cas actuel, ce joint n'est autre que celui de naissance.

En composant R_7 avec le poids P_8 de ABCD on obtient la résultante R_8, qui coupe le joint de culée au second point y, et la composition de R_8 avec le poids de la culée donne enfin la résultante R_9, qui rencontre en z la base EF de la culée. Fz représente l'épaisseur de la culée pour laquelle a lieu l'équilibre-limite.

Dans la pratique on obtiendra l'épaisseur de la culée par le calcul au moyen de l'équation (3). Il faudra pour cela réunir dans un tableau, suivant le type déjà employé, les forces horizontales dont les grandeurs sont représentées par les longueurs bc, no, vw, etc., et dont les bras de levier sont représentés par les distances verticales GH, GI, GK, etc., des horizontales aH, mJ, uK, etc., au-dessous du sommet G de la voûte.

On peut joindre à ce tableau le calcul des pressions horizontales

q_1, q_2, q_3... qui sollicitent les couronnes successives, pressions qu'on obtient en multipliant par la demi-ouverture a de la voûte les forces horizontales appliquées à un fuseau d'un mètre d'épaisseur à la base, soit ici par $\frac{a}{0,31}$ les forces horizontales Q_1, Q_2, Q_3....

FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES				SOMMES PARTIELLES			PRESSIONS HORIZONTALES SUR LES COURONNES		
Numéros.	Force.	Bras de levier.	Moment.	Force.	Moment.	Bras de levier.	Force.	$\frac{a}{0,31}$	Produit.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	m. c.	m.	m'	m. c.	m'	m.	m. c.		m c.
Q_1	0,21	0,22	0,05	0,21	0,05	0,22	0,21	30	6,3
Q_2	0,19	0,57	0,11	0,40	0,16	0,38	0,19	30	5,7
Q_3	0,39	1,00	0,39	0,79	0,55	0,69	0,39	30	11,7
Q_4	0,60	1,73	1,04	1,39	1,59	1,13	0,60	30	18,0
Q_5	0,44	2,76	1,21	1,83	2,80	1,53	0,44	30	13,2
Q_6	0,18	4,08	0,73	2,01	3,53	1,75	0,18	30	5,4
	2,01		3,53				2,01		60,3

De ce tableau l'on tire la somme Q des forces horizontales égale à 2,01, et son bras de levier, par rapport au sommet G du joint supérieur, égal à 1,75 ; par suite, le bras de levier par rapport au joint de naissance est $9^m,42 + 0^m,94 - 1^m,75 = 8^m,61$; donc le moment $N = 2,01 \times 8,61 = 17,31$.

Le tableau relatif aux forces verticales donne aussi $P = 9,44$, et son moment par rapport aux naissances $M = 9,44(9,42 - 8,1) = 12,46$.

La hauteur f de la culée jusqu'aux naissances est $12^m,56$, sa hauteur totale $g = 23^m,55$, le coefficient de stabilité $n = 3$. On a donc, par l'équation (3)

$$e = \frac{-9,44 + \sqrt{2 \times 23,55\,[3\,(12,56 \times 2,01 + 17,31) - 12,46] + (9,44)^2}}{23,55} = 4^m,40.$$

Si l'on prenait au contraire $n = 1$, on aurait $e = 1^m,79$, ce que la construction avait déjà fait connaître.

Second exemple. — *La coupole de l'église de Saint-Pierre à Rome.*

Le profil de cette coupole (fig. XIX à la fin du volume) est sensiblement une demi-circonférence de $43^m,96$ de diamètre ; dans sa

ırtie inférieure, jusqu'à $9^m,42$ environ au-dessus du centre, la ›upole est formée d'une seule voûte pleine de $3^m,61$ d'épaisseur; ans sa partie supérieure, au contraire, elle se compose de deux oûtes séparées l'une de l'autre de $1^m,57$ environ; la voûte extéieure a une épaisseur de $0^m,78$, l'intérieure a une épaisseur de $1^m,26$ .u sommet, $1^m,57$ aux naissances.

Au sommet de ces deux voûtes est une ouverture de $3^m,77$ de 'iamètre, surmontée d'une lanterne cylindrique. La grandeur de ı charge que cette lanterne transmet à la coupole est représentée ır la figure *abcd* de $0^m,63$ de largeur et de $17^m,27$ de hauteur, et ı répartit de telle sorte que la voûte extérieure supporte les deux ›rs de cette charge, et la voûte intérieure un tiers seulement. Le ste de la coupole n'est pas chargé. Quoique la voûte proprement te s'arrête au onzième joint, la tour ronde ABCD qui la supporte ›it y être adjointe, car c'est seulement au-dessous de AB que se ɔuve l'entablement principal.

On va déterminer les forces verticales et horizontales comme on ı décrit avec détail ci-dessus; il faut un calcul spécial pour chaque ûte, depuis le sommet jusqu'au huitième joint.

Nous partageons la voûte extérieure en neuf parties, l'intérieure huit, d'une épaisseur uniforme de $3^m,14$, excepté la première, i répond à la charge de la lanterne, et n'a que $0^m,63$. La partie férieure massive de la coupole se divise en trois segments de $3^m,14$ acun. Le douzième segment, ABCD, a $3^m,14$ de largeur et $7^m,22$ hauteur.

On établira comme il suit les tableaux des forces verticales agisnt sur les deux voûtes de la partie supérieure de la coupole.

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES							SOMMES PARTIELLES		
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Epaisseur	Produit.	Bras de levier.	Moment.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1° POUR LA VOUTE EXTÉRIEURE.									
	m.	m.	m.	m. c.	m.	m'	m. c.	m'	m.
0	0,63	7,06	0,06	0,27	4,33	1,17	0,27	1,17	4,3
1	3,14	0,78	0,08	0,20	6,28	1,26	0,47	2,43	5,0
2	3,14	0,78	0,12	0,29	9,20	2,67	0,76	5,10	6,8
3	3,14	0,78	0,16	0,39	12,03	4,69	1,15	9,79	8,6
4	3,14	0,78	0,19	0,47	14,76	6,94	1,62	16,73	10,4
5	3,14	0,78	0,23	0,56	17,18	9,62	2,18	26,35	12,6
6	3,14	0,78	0,25	0,61	19,37	11,82	2,79	38,17	13,7
7	3,14	0,78	0,28	0,69	21,26	14,67	3,48	52,84	15,7
8	3,14	0,78	0,30	0,73	22,76	16,61	4,21	69,45	16,5
				4,21		69,45			
2° POUR LA VOUTE INTÉRIEURE.									
1	0,63	13,97	0,06	0,53	4,40	2,33	0,53	2,33	4,4
2	3,14	1,29	0,08	0,32	6,28	2,01	0,85	4,34	5,1
3	3,14	1,33	0,12	0,50	9,26	4,63	1,35	8,97	6,7
4	3,14	1,38	0,16	0,69	12,06	8,32	2,04	17,29	8,5
5	3,14	1,43	0,19	0,85	14,57	12,38	2,89	29,67	10,3
6	3,14	1,48	0,22	1,02	16,89	17,23	3,91	46,90	12,0
7	3,14	1,52	0,25	1,19	18,84	22,42	5,10	69,32	13,6
8	3,14	1,57	0,27	1,33	20,41	27,15	6,43	96,47	15,0
				6,43		96,47			

Au moyen de cette double table, on pourra faire pour chacune des deux voûtes la construction des forces horizontales Q_1, Q_2, Q_3,.... Pour ne pas compliquer la figure, on n'a conservé que la construction relative à la voûte intérieure.

On voit, par la construction, qu'il n'y a besoin d'introduire des forces horizontales que pour les couronnes supérieures au sixième joint sur chacune des deux voûtes, car les résultantes suivantes R , R_8 rencontrent les joints correspondants, n°s 7 et 8, dans l'épaisseur de la voûte. C'est donc le sixième joint qu'on doit considérer comme joint de rupture.

Les tableaux suivants donnent les forces horizontales ainsi que les pressions horizontales sur les couronnes successives ; les bras

levier inscrits dans ces tableaux se rapportent au sommet E de :trados de la coupole.

	FORCES HORIZONTALES ÉLÉMENTAIRES			SOMMES PARTIELLES			PRESSIONS HORIZONTALES SUR LES COURONNES		
numéros.	Force.	Bras de levier.	Moment.	Force.	Moment.	Bras de levier	Force.	$\frac{a}{0,31}$	Pression.
1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				1° POUR LA VOUTE EXTÉRIEURE.					
	m. c.	m.	m⁴	m c.	m⁴	m.	m. c.		m. c.
)0	0,24	0,31	0,07	0,24	0,07	0,3	0,24	70	16,8
)1	0,44	0,44	0,19	0,68	0,26	0,4	0,44	70	30,8
)2	0,47	1,26	0,59	1,15	0,85	0,7	0,47	70	32,9
)3	0,32	2,35	0,75	1,47	1,60	1,1	0,32	70	22,4
)4	0,26	3,92	1,02	1,73	2,62	1,5	0,26	70	18,2
)5	0,14	5,75	0,80	1,87	3,42	1,8	0,14	70	9,8
)6	0,07	7,94	0,56	1,94	3,98	2,0	0,07	70	4,9
	1,94		3,98				1,94		135,8
				2° POUR LA VOUTE INTÉRIEURE.					
)1	0,49	2,73	1,34	0,49	1,34	2,7	0,49	70	34,3
)2	0,49	2,89	1,42	0,98	2,76	2,8	0,49	70	34,3
)3	0,71	3,83	2,72	1,69	5,48	3,2	0,71	70	49,7
)4	0,51	5,09	2,60	2,20	8,08	3,7	0,51	70	35,7
)5	0,35	6,78	2,37	2,55	10,45	4,1	0,35	70	24,5
)6	0,20	8,85	1,77	2,75	12,22	4,3	0,20	70	14,0
	2,75		12,22				2,75		192,5

u huitième joint, où aboutissent les deux voûtes partielles, la ltante des forces verticales et horizontales appliquées à la voûte :ieure est représentée en grandeur et en direction par *hi* et ıe le joint en *n*; la résultante des forces appliquées à la voûte rieure est représentée en grandeur et en direction par *kl* et ıe le joint en *m*.

u-dessous de ce joint, les deux voûtes se réunissent; il faut : composer les deux résultantes partielles *ki*, *kl* en une seule, laquelle on continuera la construction dans la partie inférieure

de la coupole. Voici la composition dont il s'agit effectuée le plus simplement possible par le calcul :

	FORCES VERTICALES			FORCES HORIZONTALES		
	Force.	Moment.	Bras de levier	Force.	Moment.	Bras de levier
	m c.	m⁴	m	m c.	m⁴	m.
Voûte extérieure....	4,21	69,45	16.5	1,94	3.98	2,0
Voûte intérieure.....	6,43	96,47	15,0	2,75	12,22	4,3
Ensemble.....	10,64	165,92	15,6	4,69	16,20	3,4

On fait maintenant $Eo = 15,6$, bras de levier de la force verticale ; $op = 3,4$, bras de levier de la force horizontale ; $pq = 10,64$, force verticale ; $qr = 4,69$, force horizontale. On obtient alors en pr la grandeur et la direction de la résultante cherchée, laquelle rencontre le huitième joint en un point s. Dans le dessin, pour occuper moins de place, les lignes représentatives des forces sont réduites au quart : celle de la résultante est donc réduite dans la même proportion.

Il reste à construire un dernier tableau des forces verticales pour la partie inférieure de la coupole. La première ligne sera formée des nombres que nous venons de trouver pour la résultante des forces verticales sur le huitième joint.

FORCES VERTICALES ÉLÉMENTAIRES							SOMMES PARTIELLES		
Numéros.	Largeur.	Hauteur.	Epaisseur.	Produit.	Bras de levier.	Moment.	Force.	Moment.	Bras de levier.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				m c	m	m⁴	m. c	m⁴	m.
8 Rés.	»	»	»	10.64	15,6	165,92	10,64	165,92	15,6
9	3 14	3,64	0,29	3,31	22,6	74,81	13.95	240,73	17,3
10	3,14	3,64	0.31	3,54	23,4	82,84	17,49	323,57	18,5
11	3.14	3,64	0,31	3.54	23,8	84,25	21,03	407,82	19,4
12	3,14	7,22	0,31	7,03	23,5	165,20	28,06	573,02	20,4
				28,06		573,02			

On continuera la composition successive des forces au moyen de ce tableau, et l'on obtiendra en dernier lieu une résultante *tu*, qui, convenablement prolongée, vient rencontrer le joint AB non plus dans l'épaisseur du massif, mais en dehors, en un point *v*.

La coupole n'est donc pas stable, et il est nécessaire, soit d'épaissir la culée en conservant la figure adoptée, soit, si l'on conserve l'épaisseur de la culée, de modifier le profil, afin d'obtenir une poussée moindre sur la culée; ou enfin, de revêtir la voûte, au-dessus du joint AB, d'une bande de fer qui détruit la poussée. C'est à ce dernier parti qu'on a dû recourir à l'église de Saint-Pierre, après la construction.

En composant enfin la résultante *tu* avec le poids de la culée, on obtient en FG l'épaisseur minimum pour laquelle la culée soit en équilibre. Quant à l'épaisseur pratique, on la déduit de l'équation (3), comme il suit :

On a

$$P = 28{,}06\,;\ M = 28{,}06\,(21{,}98 - 20{,}4) = 44{,}33\,;$$

$$Q = 4{,}69\,;\ N = 4{,}69\,(21{,}98 + 3{,}77 + 7{,}22 - 3{,}4) = 138{,}63\,;$$

$$f = 17{,}58\,;\ g = 17{,}58.$$

Pour $n = 3$, l'équation (3) donne

$$e = \frac{-28{,}06 + \sqrt{2 \times 17{,}58\,[3 \cdot 17{,}58 \times 4{,}69 + 138{,}63) - 44{,}33] + (28{,}06)^2}}{17{,}58}$$

$$e = 10^{m},7.$$

Pour $n = 1$, $e = 4^{m},4 = FG$.

Nous concluons de ce qui précède que, si la coupole de Saint-Pierre n'était pas ceinte d'une bande de fer annulaire qui détruit la poussée horizontale, cette voûte ne serait pas stable, car la culée devrait avoir une épaisseur uniforme de $10^{m},7$, tandis qu'en mesurant la culée existante et y ajoutant les contre-forts discontinus qui la renforcent, on ne trouve pas plus de $9^{m},4$.

Pour qu'une bande de fer détruise la poussée de la voûte dont il s'agit, il faut lui donner une section calculée par la formule $\left(\frac{aQ}{2500 \times \varepsilon}\right)^{\text{mq.}}$ exposée plus haut, où Q exprime la poussée pour un fuseau d'épaisseur ε. Nous avons considéré un fuseau de $0^{m},31$

d'épaisseur. La formule devient donc $\left(\frac{a\left(\frac{Q}{0.31}\right)}{2500}\right)^{mq}$, c'est-à-dire

$$\frac{21,98 \times 4,69}{0,31 \times 2500} = 0^{mq},1305.$$

Mais, dans l'application, on peut se contenter de dimensions moindres, car rien n'oblige à détruire la totalité de la poussée au moyen de la bande de fer : on déterminera celle-ci de manière qu'elle détruise le supplément de poussée qui s'oppose à ce que l'équilibre ait lieu avec le coefficient 3 de stabilité.

§ 59 *a*. Remarques sur la théorie des cintres.

La théorie des cintres, elle aussi, est généralement exposée d'une manière inexacte. Lorsqu'on poursuit la construction d'une voûte à partir des naissances, on pose d'abord un certain nombre de voussoirs à joints peu inclinés, qui peuvent résister verticalement à la pression des voussoirs supérieurs, et ne transmettent par conséquent au cintre aucune pression.

Puis viennent des voussoirs dont le glissement n'est empêché que par la résistance du cintre, et qui, par conséquent, exercent une pression sur ce cintre. Dans les premiers voussoirs de cette catégorie, la verticale du centre de gravité du voussoir rencontre encore le joint inférieur correspondant ; mais dans ceux qui sont plus élevés, cette verticale tombe directement sur le cintre, ce qui influe sur les conditions d'équilibre de celui-ci.

Mais, dans tous les cas, l'équilibre du cintre se produit conformément au principe de la moindre résistance, c'est-à-dire dans des directions qui s'approchent autant que possible de la verticale, sans dépasser l'angle de frottement entre les voussoirs et le cintre; ainsi la direction des actions n'est pas constamment normale au cintre.

Nous croyons d'autant moins utile d'insister sur ces considérations, que cette théorie n'a pas une grande importance pratique. Dans les applications, on se tient dans des conditions satisfaisantes de sécurité en admettant que les parties successives du cintre sont chargées par les poids qui leur correspondent verticalement.

CHAPITRE III.

CRITIQUE DES THÉORIES DES VOUTES LES PLUS CONNUES.

---

§ 60. Théorie de Lahire.

Une exacte connaissance des actions qui se produisent dans une voûte peut seule donner au constructeur la confiance dont il a besoin pour disposer des formes de l'arc, de l'épaisseur de la voûte, de la division en joints et des culées, de manière à assurer la stabilité de toutes les parties : cela est vrai surtout quand il se propose un but nouveau et que les expériences et les analogies ne fournissent pas de renseignements suffisants. Une étude complète et aussi rigoureuse que possible de ces actions présente donc autant d'intérêt pour l'enseignement scientifique de la mécanique que d'importance pour l'art des constructions.

Il a été fait pour le progrès de cette théorie de nombreux efforts, et l'on a introduit successivement divers principes ou hypothèses, dont les savants et les praticiens ont plus ou moins profité, et dont nous devons exposer ici les résultats.

Cet ordre de questions présente cette difficulté particulière, que sous les conditions données du système il y a une infinité de groupes de forces possibles, sans que l'on ait pu discerner parmi ces systèmes celui qui existe en effet dans la nature. Il est vrai que le principe de la moindre résistance est venu lever cette indétermination ; néanmoins il ne sera pas inutile d'insister sur les défauts des théories antérieures afin qu'on puisse se rendre compte, dans les cas où l'une ou l'autre se trouverait employée, de l'influence des hypothèses qui leur servent de base.

Remarquons d'abord que les théories antérieures s'appliquent toujours à des voûtes formées de deux moitiés symétriques et symétriquement chargées, dans lesquelles il existe à la clef une pression horizontale qui est la poussée. On considère généralement, comme

nous l'avons fait aussi, une matière de voussoirs incompressible, et dans les théories les plus récentes on considère avant tout l'équilibre de rotation, lequel est en effet le plus important pour la pratique. C'est aussi surtout à cet équilibre que se rapportent les remarques qui vont suivre.

Lahire, au commencement du siècle dernier, a cherché le premier à évaluer d'une manière scientifique les actions qu'exerce une voûte contre ses culées; il a admis pour cela l'existence d'un groupe de forces qui, eu égard aux dimensions de la voûte, paraissait conforme à la réalité.

Il admit que toute voûte a la faculté de se rompre de telle sorte qu'il y ait un joint de rupture à égale distance de la clef et de la naissance. Il se représenta la partie supérieure de la voûte aussi bien que la partie inférieure, y compris la culée, comme deux solides invariables et sans joints, et il calcula la pression au joint de rupture en le considérant comme absolument poli, et en attribuant à la partie supérieure la fonction d'un coin qui exerce une pression normale contre le joint de rupture.

Il est facile de reconnaître que cette manière de procéder ne peut conduire qu'à une assez grossière évaluation de la poussée, s'éloignant, suivant les cas, ou peu ou beaucoup de la vérité. En admettant un joint de rupture absolument poli, ce qui n'arrive jamais, il fait la poussée trop forte; il la diminue au contraire en plaçant arbitrairement ce joint au milieu du demi-arc. En outre, cette théorie ne donne le vrai point d'application de la pression ni à la clef, ni au point de rupture, ni à la culée, et ne peut ainsi fournir aucun criterium de la stabilité de l'arc proprement dit entre la clef et les naissances, cette stabilité dépendant de l'équilibre de rotation.

§ 61. Théorie du coin d'Eytelwein, etc.

La théorie de Lahire a reçu plus tard des perfectionnements sous le nom de *théorie du coin :* on a cessé d'admettre une fois pour toutes une position fictive assignée *à priori* au joint de rupture; on a déterminé ce joint en rendant maximum la pression exercée sur les culées par l'ensemble des voussoirs. On a continué d'ailleurs à considérer

les joints comme parfaitement polis, de sorte que les pressions réciproques des voussoirs seraient nécessairement normales aux surfaces de joints. Cette hypothèse, très-éloignée de la vérité, n'est pas propre à indiquer la vraie courbe des pressions parmi toutes les courbes possibles. Les résultats qu'on en déduit ne peuvent donc donner aucune idée juste sur l'équilibre de glissement d'une voûte réelle; en effet, le frottement entre les voussoirs s'exerce toujours en fait, et en le négligeant on aboutit à cette proposition absurde, que l'équilibre d'une voûte est impossible quand les joints de culée sont horizontaux, toutes les fois que l'épaisseur de la voûte sur ces joints n'est pas infiniment grande. Au reste cette théorie, même considérée comme simple recherche scientifique de l'équilibre de voussoirs absolument polis, ne donne pas la moindre notion de l'équilibre de rotation des voussoirs autour de leurs arêtes, qui a beaucoup plus d'importance.

Eytelwein commence (§§ 374 à 399 de son *Manuel de statique*, t. II) par développer avec détails la théorie des voûtes telle qu'elle résulte des hypothèses ci-dessus indiquées. Il la fait suivre (§§ 400 à 414) d'une discussion où il considère le frottement entre les voussoirs et cherche les conditions d'équilibre de glissement, en supposant que les pierres de la voûte ne puissent être en équilibre sans l'intervention d'un frottement. Mais la voie suivie par Eytelwein ne saurait conduire au but. Il commence, en effet, par admettre que le poids de chaque voussoir s'applique normalement sur les joints, même dans les cas de joints rugueux. Puis il se met en contradiction avec le principe d'égalité de l'action et de la réaction, en admettant que la pression normale d'un voussoir peut surpasser d'une grandeur déterminée δ la réaction normale de la pierre voisine. Il décompose cette grandeur δ en composantes horizontale et verticale, fait la somme des moments de ces composantes par rapport à l'arête extérieure de la base de la culée, et les réunit aux moments, pris par rapport à cette arête, des composantes verticales et horizontales qui se seraient produites si tous les voussoirs avaient été déjà en équilibre sans frottement; il arrive ainsi à une équation exprimant la stabilité de la voûte par rapport à l'arête inférieure du massif de culée. Il n'est besoin d'aucune discussion pour montrer que les résultats ainsi obtenus sont tout à fai illusoires.

C'est seulement aux paragraphes 417 à 419 qu'Eytelwein, cher-

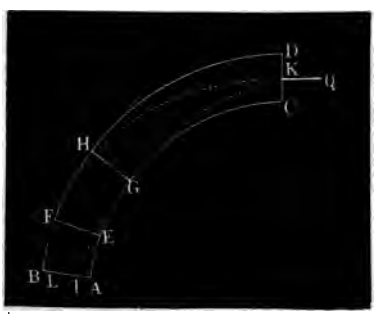
chant le joint de rupture qui correspond à l'équilibre de glissement, fait entrer correctement dans le calcul l'influence du frottement. Mais il demeure une lacune importante en ce qui concerne la poussée à la clef ; les considérations qui s'y rapportent manquent de généralité et ne traitent pas la question sous toutes ses faces.

L'ouvrage d'Unger, *Exercices de mathématiques appliquées* (t. II, contenant les exercices de statique et de mécanique), renferme une exposition de l'équilibre de glissement, où le frottement n'est que partiellement introduit, et qui est conforme à celle d'Eytelwein quant aux traits principaux.

§ 62. Théorie de Coulomb.

Coulomb, en 1773, s'est approché beaucoup plus que Lahire de la solution scientifique du problème, en portant son attention non-seulement sur l'équilibre de glissement, que Lahire prenait pour base unique de son imparfaite construction, mais aussi sur les conditions réelles de l'équilibre de rotation. Voici en quoi consiste sa théorie.

Fig. 104.



On suppose que la résultante horizontale de la pression à la clef CD passe par le point K (fig. 104); soient EF et GH deux joints quelconques, Q_1 la valeur de la pression nécessaire pour empêcher le segment de voûte CDGH de tourner de dehors en dedans autour de l'arête G, soit Q_2 la valeur de la pression nécessaire pour empêcher une rotation du segment CDFE en dehors autour de l'arête F.

Cela posé, si l'on cherche les valeurs de Q_1 et Q_2 successivement pour tous les joints compris entre AB et CD, le maximum de Q_1 sera la véritable poussée de la voûte. La stabilité de l'arc exige toutefois que le maximum de Q_1 soit inférieur au minimum de Q_2. Si cette dernière condition n'était pas remplie, GH répondant par

exemple au maximum de Q_1 et le joint EF placé au-dessous répondant au minimum de Q_2, la voûte se détruirait de cette manière : il se produirait simultanément une rotation autour des arêtes G et F, d'où le nom de *joint de rupture* donné à GH. Si le joint inférieur EF répondait au maximum de Q_1 et le joint supérieur GH au minimum de Q_2, la voûte se détruirait de cette manière : il y aurait rotation simultanée autour des arêtes H et E, d'où le nom de *joint de rupture* donné encore dans ce cas à GH.

Dans le premier cas de rupture, il y a manifestement aussi une rotation autour du point supérieur D du joint de la clef, et dans le second, autour du point inférieur C de ce même joint : ce peut être la cause pour laquelle Coulomb place le point d'application K de la pression à la clef seulement aux points D et C, et ne constate la stabilité de la voûte que dans ces deux positions ; il ne s'est pas préoccupé de la position véritable du point K. Il lui manquait pour cela un principe qu'on chercherait vainement aussi dans ce qu'il expose sur l'équilibre de glissement. Pour ce dernier, Coulomb cherche le maximum des forces Q′, qui, appliquées au lieu de Q au point K, empêchent le glissement de la masse CDHG sur un joint quelconque GH, puis le minimum des forces Q″, appliquées en K, qui sont en état de faire monter la masse CDFE sur le joint EF ; il exige que le maximum de Q′ soit moindre que le minimum de Q″. En outre, en considérant simultanément l'équilibre de rotation et de glissement, il est nécessaire que chacun des deux maximums de Q_1 et Q′ soit moindre que chacun des deux minimums de Q_2 et Q″, et il faut prendre pour poussée vraie Q le plus grand des deux maximums de Q_1 et Q′, lequel est ordinairement celui relatif à la rotation.

Comme la grandeur et le moment de la véritable poussée horizontale des voûtes stables, ainsi que la position du joint de rupture dépendent de la vraie position du point K; comme le mode de renversement des voûtes instables en dépend également, il s'ensuit que la théorie de Coulomb n'a pas encore atteint le degré de perfection qu'exige la science, quoiqu'elle soit par sa marche rationnelle d'une valeur incomparablement supérieure à celle de Lahire, qui partait d'hypothèses mal fondées.

Plusieurs auteurs se sont consacrés au développement des principes précédents ; en particulier MM. Audoy (*Mémorial de l'officier du génie*, n° 4), Navier (*Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*) et Persy (*Cours de stabilité des constructions*, lithogra-

phie de l'École d'application à Metz) se sont proposé d'éclairer les divers cas de la pratique et de développer des formules générales pour les voûtes et culées qui se trouvent précisément à l'équilibre limite. MM. de Garidel (*Mémorial de l'officier du génie*, n° 12) et Petit (*ibidem*) ont voulu simplifier la méthode et calculer des tables en vue des applications. Enfin M. Poncelet (*ibidem*) a donné une méthode purement graphique pour l'application générale de la théorie de Coulomb.

Cependant aucun de ces auteurs n'a posé une condition plausible de la vraie position du point d'application K de la pression à la clef, et n'a ainsi délivré la théorie dont il s'agit de l'indétermination qui lui est inhérente. Ils se restreignent au contraire à la recherche du cas particulier où la pression dont il s'agit passe par le point le plus haut D de la clef comme étant le cas ordinaire des applications.

Les remarques que renferment les écrits de Persy et de Petit particulièrement sur l'indétermination du point K pour les voûtes stables ou instables sont insuffisantes et en partie erronées. Des raisonnements mal fondés conduisent à cette conclusion générale, que le point K est situé ou en D ou en C, ce qui n'est vrai en général ni pour les voûtes stables, ni pour les voûtes instables.

§ 63. Comparaison détaillée de la théorie de Coulomb avec la nouvelle.

Nous allons comparer plus à fond la théorie de Coulomb avec la nôtre au point de vue principal, celui de l'équilibre de rotation.

En ce qui concerne d'abord les positions possibles du point d'application K à la clef, il résulte assez clairement de tout ce que nous avons dit que, ni dans les voûtes stables, ni dans les voûtes instables, ces positions possibles ne se réduisent aux deux points D et C; la destruction d'une demi-voûte ne se produit pas en effet nécessairement par la séparation en deux parties, mais souvent par des rotations autour de plusieurs arêtes à la fois.

Supposons donc une demi-voûte stable ABCD (fig. 105), dans laquelle les courbes des pressions répondant au minimum et au maximum de la poussée ont pour figures respectives KMNI, K'N'M'I'; les courbes des pressions possibles, capables, en d'autres termes,

de tenir la voûte en équilibre, pourront avoir leurs points de départ en des points quelconques entre K et K′; mais aucune courbe des pressions possible n'aura dans ce cas son point d'application de la poussée à la clef, soit dans la partie KD, soit dans la partie K′C, ni en D ni en C.

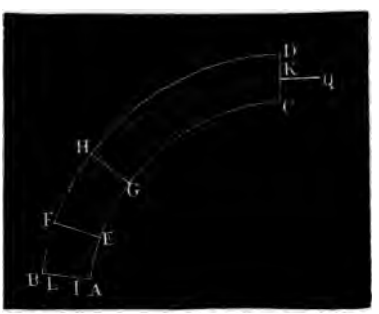
Fig. 105.

Dans ce cas, la théorie de Coulomb doit être regardée comme inadmissible. Cette théorie indiquerait en effet que l'équilibre est impossible tant en prenant le point D qu'en prenant le point C comme point d'application, et elle laisserait échapper toutes les positions de la courbe des pressions qui sont effectivement compatibles avec l'équilibre, puisque le vrai point d'application de la poussée est en K, et peut au besoin s'avancer jusqu'en K′, si la considération du glissement le rend nécessaire.

Il existe une classe de voûtes, la plus nombreuse peut-être dans ses applications, mais qui n'a pas été délimitée par Coulomb et ses successeurs, pour laquelle les points K et M se réunissent en D, de sorte que la vraie poussée passe alors au point le plus haut de la clef. Mais jamais, dans une voûte stable qui n'est pas à l'état d'équilibre limite, les points K et C ne coïncident, de sorte que la vraie poussée ne passe pas par le point inférieur de la clef; donc, en ce qui concerne ce point, la théorie de Coulomb donne toujours une courbe simplement possible, jamais la vraie.

Soit K le point d'application de la poussée à la clef (fig. 106) et Q_1 le maximum, d'après Coulomb, de cette poussée, lequel correspond à l'arête intradossale G. Si, d'après les principes connus, on construit la courbe des pressions KI répondant à Q_1, cette courbe rencontrera l'intrados CA au point G, et sera au-dessus de CA en tout autre point. Ceci résulte sans difficulté des propriétés générales de la courbe des pressions, car si KI passait par un point quelconque au-dessous

Fig. 106.

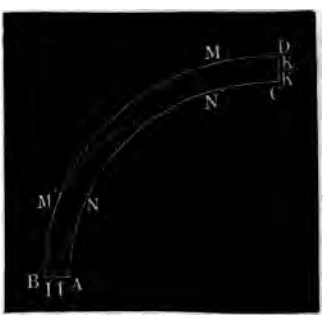


de CA, on pourrait, en augmentant la force Q_1 sans toucher au point K, élever cette courbe, de sorte qu'elle n'eût plus qu'un point commun avec CA; il y aurait ainsi une poussée plus grande que Q_1 répondant au point K. Soit Q_2 le minimum, selon Coulomb, de la poussée en K, lequel correspondra à l'arête extradossale F; une courbe des pressions KL répondant à Q_2 rencontrera l'extrados DB au point F, et sera partout ailleurs au-dessous de cette ligne, ce qui est aussi facile à démontrer par les propriétés des courbes des pressions.

Si maintenant la stabilité a lieu, la courbe KGI, d'après nos principes antérieurs, ne devra sortir en aucun point de la voûte et par conséquent ne coupera nulle part l'extrados DB. Puisque d'ailleurs deux courbes telles que KI, KL, menées d'un même point de départ K, ne peuvent avoir entre elles d'autre point commun que ce point K, et que celle qui est inférieure à l'autre répond à une moindre poussée, il en résulte que dans l'état d'équilibre le maximum Q_1 de Coulomb répondant à KI ne peut être plus grand que le minimum Q_2 répondant à KL. Cela montre par quel lien la théorie de Coulomb se rattache à la nôtre.

Si au principe de Coulomb on vient joindre celui de la moindre résistance, l'indétermination de la position du point K disparaît, parce qu'on doit ajouter la condition que le maximum Q_1 soit le plus petit possible : d'où l'on conclut que les deux courbes KGI, KFL doivent se réunir en une seule avec leurs propriétés caractéristiques, qu'ainsi le maximum de Q_1 doit égaler le minimum de Q_2.

Fig. 107.



Deux courbes différentes, KMNI, K'N'M'I' (fig. 107), satisfont l'une et l'autre à cette égalité. La première rend les deux forces Q_1, Q_2 aussi petites que possible; c'est la courbe des pressions réellement existante : la seconde les rend aussi grandes que possible et répond à la plus grande poussée imaginable, laquelle n'a pas d'existence réelle.

D'après le mode d'exposition de Coulomb, on serait conduit à penser que la condition d'égalité des deux forces Q_1 et Q_2 répond à l'équilibre limite; cependant on obtient ainsi une stabilité parfaite, et la limite d'équilibre n'est

atteinte que si les deux courbes KMNI, K'N'M'I' coïncident.

Nous nous résumerons en disant que la théorie de Coulomb ne donne jamais que des limites entre lesquelles oscillent les forces, les points, les lignes qu'on cherche. Cette méthode ne permet certainement jamais de déterminer ces inconnues, et c'est en cela que lui manque la faculté de servir de base à une théorie des voûtes exacte et complète.

§ 64. Théories des voûtes fondées sur la considération d'une chaînette ou de courbes analogues.

Plusieurs auteurs, tels que Gerstner (*Manuel de mécanique*, t. I), Knochenhauer (*Statique des voûtes*), Schubert (*Théorie de la construction des voûtes de ponts en pierre*), imaginent que les points d'application des pressions résultantes sur les différents joints soient réunis par une ligne, qui pour des voussoirs de dimension finie est polygonale, et qui pour des voussoirs infiniment minces est une courbe continue. Ils cherchent sous quelles conditions la ligne sera en état de supporter les charges afférentes à la voûte, par la résistance longitudinale de ses éléments et les réactions latérales aux sommets d'angles.

Nous n'insisterons pas sur ce fait, que tout cela ne constitue qu'une théorie des courbes articulées et non une théorie des voûtes, puisqu'on ne sait quelle est dans une voûte donnée la courbe articulée qu'on doit considérer; en outre, les théories dont il s'agit renferment à plusieurs égards des hypothèses sans fondement et des contradictions, spéclalement dans la manière dont les courbes articulées reçoivent l'action des forces agissant sur la voûte, et dont les réactions de la voûte correspondent aux réactions fictives des courbes.

Un examen détaillé de toutes les faces de la question nous entraînerait trop loin. Nous nous bornerons à la critique des points fondamentaux dans les remarques qui suivent.

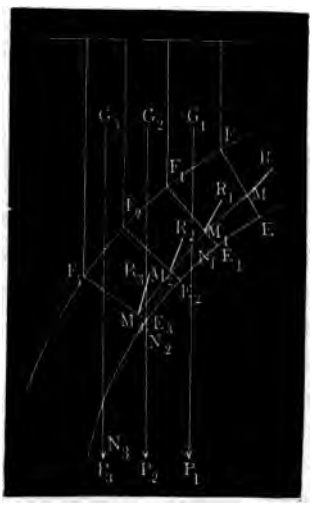
On devrait s'attendre à ce que la courbe articulée qui réunit les points d'application des pressions dans les joints successifs, qui est supposée massive et résistante, et sur laquelle on concentre par la pensée la masse entière de chaque voussoir, ne fût pas autre chose

au fond, dans les écrits dont nous parlons, que la courbe à laquelle nous avons donné plus haut le nom de courbe des pressions, et qui satisfait précisément aux conditions dont il s'agit. On voit cependant que ces auteurs s'attachent à une ligne qui sera, dans le cas des voussoirs de dimensions finies, un polygone funiculaire, et une chaînette dans le cas de voussoirs infiniment minces.

D'après la construction connue et la définition de la courbe articulée, elle devrait être notre courbe des pressions : examinons d'abord les propriétés de celle-ci considérée comme articulée.

Soient M, M_1, M_2... (fig. 108) les points d'application des pressions résultantes R, R_1, R_2... sur les joints EF, E_1F_1, E_2F_2...; soient P_1, P_2, P_3... les poids des voussoirs correspondant aux arcs FF$_1$, F_1F_2, F_2F_3... avec leurs charges, de sorte que R_1 est la résultante de R et de P_1, R_2 de R_1 et de P_2, etc.; les directions des trois forces R, R_1, P_1 concourent au point N_1, les directions de R_1, R_2, P_2 en N_2, etc. Peu importe que la direction de la force verticale P_1, par exemple, tombe entre M et M_1 ou se trouve à côté.

Fig. 108.



Le polygone MM$_1$ M$_2$ M$_3$..., qui devient une courbe dans le cas de voussoirs infiniment minces, est notre courbe des pressions et devrait être aussi une courbe articulée. Mais les trois forces R, R_1, P_1 (R_1 étant prise en sens opposé, de manière à représenter la réaction du deuxième voussoir contre le premier) se tiennent en équilibre sur la ligne MM$_1$ considérée comme rigide et invariable : or cet équilibre est absolument impossible si la ligne MM$_1$ n'a qu'une résistance longitudinale et ne peut résister à la flexion. D'où il suit immédiatement que MM$_1$ M$_2$ M$_3$ ne peut être un polygone funiculaire ni une chaînette, puisque dans les systèmes de ce genre, dont la parfaite flexibilité est la condition essentielle, l'extension longitudinale est seule possible.

Le principe de la chaînette n'est pas réalisé non plus dans la répartition de la charge suivant l'extrados, attendu que dans les systèmes de ce genre le centre de gravité du poids à supporter est situé

nécessairement sur la verticale de l'élément de la courbe, au-dessus ou au-dessous, tandis que dans le cas actuel la verticale des poids P_1, P_2... tombe indifféremment à des distances horizontales quelconques des points M, M_1, etc.

Pour considérer $MM_1 M_2 M_3$... comme un polygone funiculaire, il serait indispensable de modifier la répartition des poids P_1, P_2, P_3... de telle sorte que leurs centres de gravité se trouvassent verticalement au-dessus des sommets M, M_1, M_2...; ou, ce qui revient au même, que chaque poids, P_1 par exemple, fût décomposé par le théorème des moments en deux composantes verticales passant en M et M_1, que l'on composât ensuite les deux composantes réunies en un même sommet; il faudrait admettre encore que les pressions de la voûte ne peuvent exister que dans le sens des lignes MM_1, $M_1 M_2$..., qu'ainsi les directions R, R_1, R_2... coïncident respectivement avec ces lignes; alors il ne serait plus question de la flexion possible des lignes MM_1, $M_1 M_2$..., supposées rigides. Mais un tel système serait un système purement fictif, qui ne serait nullement comparable ni réductible au système réel; car il n'est pas permis d'introduire pour les besoins d'une hypothèse d'autres forces que celles qui existent, soit horizontalement, soit dans la direction des points.

On se demande d'où viendraient les réactions normales à la courbe et quelles sont les résistances qui peuvent leur donner naissance. Il y a là une évidente contradiction avec les principes admis : car si, outre les résistances R, R_1 et le poids P_1, il y a encore d'autres forces agissant sur les joints du voussoir $EFF_1 E_1$, ou R ou R_1 n'est pas la résultante véritable de la pression sur le joint correspondant, ce qui est contraire à l'état de la question.

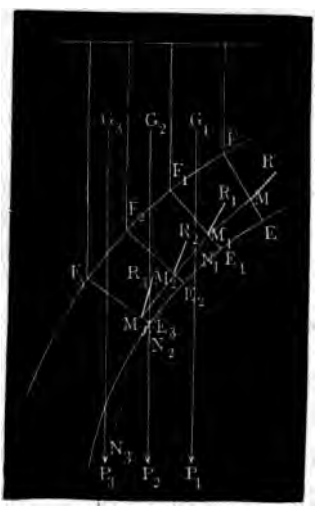
La première des deux opérations inadmissibles indiquées ci-dessus, je veux dire le changement arbitraire, la décomposition et recomposition de la charge de la voûte, doit être reprochée à tous les auteurs précités qui ont tiré la théorie des voûtes de la considération des courbes articulées. La seconde faute, qui consiste à introduire après coup des forces nouvelles, se trouve en outre chez Schubert, dans ses considérations sur ce qu'il nomme « les courbes articulées à réactions tangentielles et horizontales, » et chez Knochenhauer, aux paragraphes 14 et suivants de l'écrit rappelé ci-dessus.

Après avoir exposé le principe qui doit servir de base à la théorie des voûtes et avoir tracé comme courbe articulée, suivant laquelle

est supposée concentrée la matière de la voûte, la ligne $MM_1M_2M_3$ définie plus haut, les auteurs dont nous parlons sont conduits à considérer la ligne $N_1N_2N_3$ qui passe par les points de rencontre des forces trois à trois (R, R_1, P_1, etc.) et que nous avons nommée, au paragraphe 40, la ligne directrice des pressions. Que cette ligne soit un polygone funiculaire véritable et pour des voussoirs infiniment minces une chaînette, il n'y a aucun doute à cela. Mais il est également certain que cette ligne n'a rien de commun avec une courbe articulée dont les côtés représenteraient les voussoirs concentrés et supporteraient à leur place le poids de la voûte. Il n'est nullement nécessaire pour l'équilibre de la voûte que la ligne $N_1N_2N_3$ tombe partout dans l'épaisseur de la voûte, ce qui est pourtant bien l'obligation la plus stricte d'une courbe articulée remplaçant la voûte; et dans un grand nombre de voûtes parfaitement stables, il est impossible de construire une seule courbe $N_1N_2N_3$... qui ne sorte pas de l'épaisseur de la voûte.

Le polygone funiculaire ou la chaînette $N_1N_2N_3$....(fig. 109), qui est le lieu géométrique des points d'intersections successives des pressions R, R_1, R_2, R_3, et à laquelle sont tangentes les directions de ces forces, est tout à fait indépendante des directions des joints, tandis qu'au contraire la courbe des pressions $MM_1M_2M_3$..., lieu géométrique des points de rencontre des pressions avec les joints, dépend d'une façon très-réelle des directions de ces derniers. On voit donc que, dans les théories dont il s'agit, la direction des joints ne doit pas paraître comme élément déterminant, et l'on est conduit à cette fausse conséquence, que si le polygone funiculaire $N_1N_2N_3$ se trouve tout entier dans l'épaisseur de la voûte, l'équilibre doit toujours subsister, quelle que soit la direction des joints. Contrairement à cette remarque, l'inclinaison des joints paraît dans les formules analytiques de cette théorie, et l'on y détermine les angles des joints avec les côtés du polygone; puis on prétend que c'est une condition indifférente pour l'état du système, au point de vue mécanique, que les

Fig. 109.



joints soient normaux à la chaînette (ou dirigés suivant les bissectrices des angles du polygone).

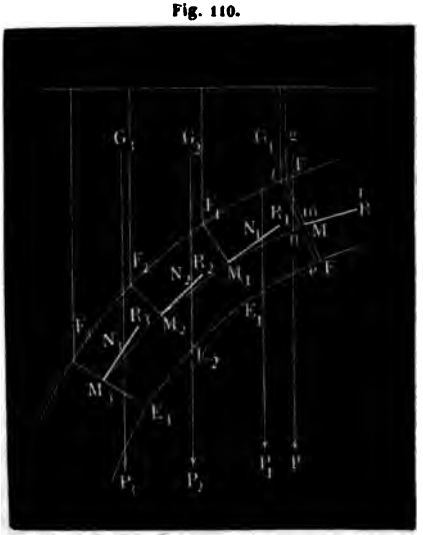
A chaque sommet d'un polygone funiculaire, il y a trois forces en équilibre, savoir le poids supporté et les tensions des deux côtés concourants ; sur chaque côté il y a deux forces qui se détruisent : savoir celles qui partent des deux extrémités de ce côté, égales et contraires, et mettent en jeu seulement la résistance absolue des côtés. Au contraire, dans la ligne articulée $MM_1 M_2$..., formée de lignes matérielles pesantes ou chargées d'une manière quelconque, il y a toujours sur chaque côté trois forces en équilibre, savoir la charge de ce côté et les résistances que ce côté éprouve à ses extrémités de la part des côtés voisins, ce qui met en jeu non-seulement la résistance absolue du côté considéré, mais aussi sa résistance relative; à chaque angle, au contraire, il y a deux forces qui se détruisent : ce sont les réactions des deux côtés contigus. D'où il suit que les directions de ces forces, qui doivent être entre elles égales et opposées, ne peuvent jamais coïncider avec les directions des côtés, comme dans le polygone funiculaire. Par le décroissement indéfini de ses côtés, le polygone funiculaire devient une chaînette ; la ligne articulée MM_1... devient d'autre part, quand ses côtés sont infiniment petits, une courbe qui n'a aucun nom caractéristique, si ce n'est celui que nous lui avons donné plus haut : la courbe des pressions.

La ligne $N_1 N_2 N_3$... est toujours un vrai polygone articulé ou une chaînette, que les voussoirs soient en équilibre avec des joints parfaitement polis, ou qu'il soit nécessaire de tenir compte du frottement, soit que les directions $R_1 M_1 N_1$, $R_2 M_2 N_2$... des résultantes R_1, R_2... fassent des angles droits ou obliques avec les joints correspondants. Mais on n'en peut dire autant de la courbe $MM_1 M_2$... qui n'est jamais un polygone funiculaire. Il ne sera pas inutile d'insister sur les causes qui, selon toute probabilité, ont fait prendre l'une pour l'autre deux courbes si différentes par leur principe.

Quand on a exposé ces théories, on a ordinairement figuré la voûte et les forces qui la sollicitent, de manière que, pour des dimensions finies des voussoirs, les verticales passant par les centres de gravité des poids P_1, P_2... tombent respectivement entre les points M et M_1, M_1 et M_2... Dans ce cas de figure, le polygone funiculaire $N_1 N_2 N_3$... prend par rapport à la courbe $MM_1 M_2$... la position de la figure 110, dans laquelle les sommets de la dernière courbe tombent

sur les côtés de la première, et non sur leurs prolongements, comme dans la figure précédente. Il semble alors que la différence de forme et de position de ces deux lignes doive disparaître quand on imagine que les voussoirs diminuent indéfiniment : de telle sorte que les deux lignes se réuniraient en une seule et que les trois points M, M_1, N_1 se rapprocheraient indéfiniment. Mais c'est une erreur. Soit EF*fe* le voussoir élémentaire qui suit le joint EF, *gp* la verticale du centre de gravité du poids *p* de cet élément et de sa surcharge ; cette verticale ne passe pas nécessairement par le point M, mais viendra couper en *n* la direction RM de la pression R qui sollicite le joint EF ; soit *rn* la direction, infiniment voisine de RM, de la résultante des forces R et *p* ; *rn* coupe *ef* en *m* ; M et *m* sont ainsi deux points consécutifs de la courbe M*m*$M_1M_2M_3$; mais le point de la chaînette correspondant aux points M et *m* est *n*, lequel n'est nullement placé entre M et *m* et en est même à une distance finie. Ainsi non-seulement la courbe continue MM_1... diffère comme forme de la chaînette, mais les points de la dernière sont à des distances finies des joints correspondants.

Fig. 110.



Ce n'est que dans le cas unique et tout particulier où les centres de gravité des voussoirs élémentaires, comme EF*fe*, sont situés verticalement au-dessus ou au-dessous des points M, *m*, M_1, M_2, que la chaînette coïncide avec MM_1... Ce cas est du reste sans importance théorique, car la courbe MM_1... dépend de la charge, dont la répartition peut varier de beaucoup de manières, et la poussée a une grandeur constante en tous les points : d'où l'on pouvait conclure d'avance que cette ligne peut, dans des circonstances données, affecter la forme d'une chaînette. D'ailleurs, dans ce cas spécial, il n'est pas nécessaire que les centres de gravité des voussoirs élémentaires se placent exactement aux points M, *m*..., quoi qu'en disent plusieurs auteurs, entre autres Unger (*Exercices de mathématiques*

appliquées, 2e volume, STATIQUE ET MÉCANIQUE, § 79) et Eytelwein, (*Manuel de statique des corps solides*, 2e vol., § 374). Il suffit, au contraire, parfaitement que les verticales des centres de gravité passent par les points M, *m*....

De tout ce qui précède nous déduirons les conséquences suivantes. Si la voûte, composée de voussoirs infiniment minces, est formée et chargée de telle manière que toutes les verticales *gp* passant par les centres de gravité des parties élémentaires EF*fe;* rencontrent les joints *ef* dans l'épaisseur de la voûte, en des points qui forment entre eux une courbe analogue à une chaînette renversée chargée de ces voussoirs, la voûte est alors en équilibre de rotation, pourvu que la chaînette dont il s'agit soit une courbe des pressions possible. Mais cela n'indique rien touchant l'équilibre de glissement qui dépend de l'inclinaison des pressions *r* sur les plans de joint *ef;* et il n'en résulte pas non plus que la chaînette soit la courbe des pressions qui existe en réalité. (Dans le cas des voussoirs finis, la condition précédente devient celle-ci : il doit exister un polygone funiculaire N_1 N_2 N_3... chargé des poids P_1, P_2, P_3... et dont les côtés rencontrent en M_1, M_2, M_3..., dans l'épaisseur de la voûte, les joints correspondants.) Si la condition précédente n'est pas remplie, le fait que la chaînette demeure dans l'épaisseur de la voûte n'implique l'existence ni de l'équilibre de rotation ni de l'équilibre de glissement, et le fait que la chaînette $N_1N_2N_3$... sortirait en partie de la voûte n'impliquerait nullement l'instabilité. Il existe cependant entre cette chaînette (ou polygone funiculaire) et l'équilibre de rotation de la voûte une relation générale qui est celle-ci : l'équilibre de rotation est assuré si les tangentes à la chaînette (ou les côtés du polygone), suffisamment prolongées, rencontrent les joints correspondants en des points M, M_1... qui soient tous dans l'épaisseur de la voûte [1].

[1] C'est aux tentatives dont l'auteur s'occupe dans ce paragraphe que se rattache la solution pratique proposée par M. Dejardin (*Routine de l'établissement des voûtes*, 1re édit. 1845, 2e édit. 1860). Cet ingénieur, se plaçant sur un terrain entièrement artificiel, prétend donner des solutions empiriques satisfaisantes et qui se justifient *à posteriori*. Il commence par déterminer empiriquement (§ 54) l'épaisseur à la clef qu'il fait croître proportionnellement au rayon de courbure. Puis il attribue au décintrement une influence décisive sur la position d'équilibre de la courbe des pressions (§ 49) : il faudra, dit-il, décintrer le plus tôt possible, afin que la courbe des pressions finales corres-

On voit par ce qui précède combien sont dangereuses pour le praticien les théories que nous venons d'examiner. La méthode imparfaite de Lahire donne du moins une valeur approchée de la poussée ; elle n'est donc pas tout à fait dépourvue de valeur pratique ; les spéculations dont nous parlons, au contraire, quoique entourées de tout l'appareil de l'analyse, peuvent égarer complétement celui qui s'y confie.

§ 65. Théories des voûtes fondées sur la considération des courbes des pressions.

Pour exposer les conditions d'équilibre des voûtes, divers auteurs ont fait usage de la courbe à laquelle nous avons donné ci-dessus le nom de *courbe des pressions*, parce qu'elle passe par les points d'application des pressions résultantes sur les joints. Mais les théories établies sur cette base n'ont considéré jusqu'ici que les arcs à deux moitiés symétriques ; elles contiennent d'ailleurs des imperfections.

1. Moseley est le premier qui ait pris pour base la courbe des pressions [1], et qui ait cherché à lever l'indétermination où demeu-

ponde à la courbe moyenne, car « l'état final est la répartition uniforme de l'action entre les diverses résistances toutes les fois qu'il n'existe pas d'obstacle *évident* à ce que toutes les résistances fonctionnent également. » Inutile de faire observer combien cette proposition est inexacte.

Ailleurs, on lit (§ 28) : « L'équilibre exige que la courbe des pressions qui passe par le sommet de l'extrados et celle qui passe par le sommet de l'intrados ne sortent pas du profil de la voûte. On a vérifié que, dans le profil adopté, cette double condition est satisfaite et l'est avec toute l'économie désirable, car elles s'éloignent peu de l'extrados et de l'intrados. » Cette condition imposée conduit nécessairement à des dimensions trop fortes ; il n'y a donc pas lieu de suivre les règles de tracé proposées.

Pour ce tracé, on fait en sorte que la pression exercée normalement à l'intrados soit constante ; l'extrados est déterminé en conséquence, en supposant essentiellement que la voûte se comporte comme un fil tendu sur le cintre.

Il n'y a là, on le voit, rien de rationnel ; la critique faite ci-dessus des théories de Gerstner, Knochenhauer, etc., s'applique complétement à l'essai de Dejardin, qui, postérieur aux ouvrages de Méry et de Moseley, n'est en progrès sur aucun point.

[1] Il doit être permis au traducteur français de présenter les titres de priorité

rait la vraie courbe des pressions parmi toutes celles qui sont possibles dans une voûte stable ; il y est arrivé en introduisant dans la science le principe de la moindre résistance. (Voir *Philosophical magazine*, 1833 ; *Philosophical transactions*, 1837, et *The mechanical principles of engineering and architecture*, 1843.) Il déduit de ce principe cette condition, que la poussée doit être un minimum. Cependant Moseley n'a pas perfectionné l'emploi de cet instrument fécond et il a laissé échapper des inexactitudes.

Pour déterminer en effet la courbe des pressions qui répond au minimum de la poussée, il se contente de poser cette condition, qu'il regarde comme suffisante, savoir : que la courbe touche l'intrados ou qu'elle passe par le point le plus bas de l'intrados. Puis, pour discerner, parmi les nombreuses courbes qui satisfont à cette condition et qui ont divers points de départ à la clef, la vraie courbe et

de M. Méry. Nous reproduisons ci-dessous une note de M. Victorin Chevallier, ingénieur en chef des ponts et chaussées, insérée à la deuxième livraison du *Mémorial des travaux hydrauliques de la marine* (1862).

« Lorsque M. E. Méry arriva à Brest, en 1828, comme ingénieur des travaux hydrauliques, les voûtes et les arceaux des premières salles de l'hôpital Clermont-Tonnerre du côté N.-O. étaient en cours d'exécution et commençaient à exciter de graves inquiétudes. Il fut chargé par M. le directeur Trotté de Laroche d'en vérifier la stabilité par des calculs théoriques et des expériences comparatives. Ces études, qui se prolongèrent en 1829, ont été résumées dans le mémoire ci-joint, remis à M. Trotté de Laroche presque immédiatement après leur achèvement.

« A la même époque, M. Méry, développant des recherches sommaires auxquelles il s'était livré dans l'hiver de 1826 à 1827 à l'Ecole des ponts et chaussées, rédigea un mémoire très-intéressant sur la stabilité des voûtes *en général*, mémoire qu'il laissa en 1833 en quittant le port de Brest, et dont je pris copie en 1837 lorsque je fus attaché au service de ce port.

« C'est ce dernier mémoire qui a paru en 1840 dans les *Annales des ponts et chaussées*, avec quelques changements de rédaction pour la partie théorique, mais sans aucune modification pour les applications citées.

« Ce simple exposé fera rendre sans doute à M. Méry des titres de priorité que M. Poncelet attribue à M. Moseley par ignorance des faits, dans une notice historique insérée en 1852 aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* »

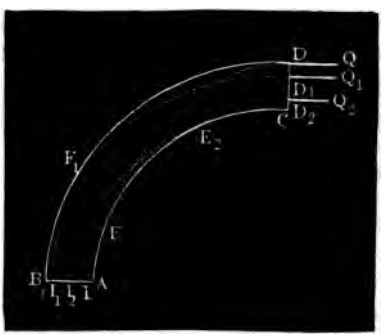
Le passage justement critiqué ci-dessus, de M. Poncelet, est relatif à des mémoires antérieurs de M. Scheffler ; M. Poncelet prétend que « cet ingénieur attribue par erreur l'initiative de la courbe des pressions à M. Méry, lequel, ainsi qu'on l'a vu, ne s'en est occupé que quelques années après M. Moseley. »

C'est M. Poncelet qui est ici dans l'erreur, ainsi qu'il résulte clairement de la note de M. Chevallier.

son point de départ, il ajoute que la poussée Q doit être un minimum absolu, pour lequel le coefficient différentiel par rapport à l'ordonnée verticale du point d'application s'annule. Si le point d'application de la force Q, ainsi déterminé, tombe entre les points extrêmes de la clef, il est le point d'application réel; mais s'il tombe dessus ou dessous, en dehors de la voûte, ce sera, dans le premier cas, le point le plus haut, dans le second, le plus bas de la clef qui sera le véritable point de départ de la courbe des pressions. Enfin si la courbe tracée au moyen des données qui précèdent coupe l'extrados, la voûte est considérée comme instable. Tel est le système de Moseley.

Mais nous avons vu que lorsqu'il existe une courbe des pressions satisfaisant aux conditions précédentes de stabilité, et qui, touchant l'extrados, commence en un point quelconque de la clef entre les extrémités de celle-ci, qui par suite n'est pas simultanément en contact avec l'intrados et avec l'extrados, cette courbe ne peut jamais répondre au minimum de la poussée. Il en résulte que le caractère assigné par Moseley à la courbe de moindre poussée n'est pas exact. On voit facilement en effet que, si la poussée Q devait être un minimum absolu, elle devrait dans tous les cas être nulle et répondre à un point d'application placé à une hauteur infinie au-dessus de la clef (fig. 111). D'après cela, la théorie de Moseley conduirait à placer le point de départ de la vraie courbe des pressions, dans tous les cas, au point le plus haut de la clef. Mais alors il n'y a plus trace des considérations que nous avons présentées dans cet ouvrage sur la stabilité et l'instabilité des voûtes, et il ne demeure qu'un seul cas, celui où la vraie courbe des pressions passe par le sommet du joint à la clef. Ce cas, qui n'est qu'un cas particulier, serait le seul possible d'après la théorie de Moseley : ce qui évidemment repose sur une erreur.

Fig. 111.



Pour que l'on ne soit pas trompé par les formules que donne Moseley au paragraphe 344 de son ouvrage précité pour les arcs de cercle (nos 488 et 489), formules qui semblent donner des valeurs

nies tant pour le minimum absolu de la poussée que pour la distance au centre des arcs du point d'application à la clef, il est essentiel de remarquer que ces formules dépendent de l'angle de rupture ψ, c'est-à-dire de l'angle des joints de rupture avec la verticale. Cet angle de rupture doit avoir été préalablement tiré de l'équation n° 487, qu'on déduit de la condition de nullité du coefficient différentiel de la poussée Q par rapport à l'angle ψ. Pour les voûtes à joint vertical à la clef, on a pour cette équation n° 487 la forme :

$$\sin 2\psi - 2\psi = \text{quantité positive.}$$

Comme, pour toutes les valeurs positives de ψ, sin 2 ψ est plus petit que 2 ψ, il s'ensuit qu'une valeur négative de ψ peut seule répondre à l'égalité qui précède. Or il est impossible de satisfaire à cette dernière condition : donc la règle qui y conduit et les formules qui s'y rapportent ou s'en déduisent ne sont pas applicables à la théorie des voûtes.

2. M. Méry (*Annales des ponts et chaussées*, 1840, 1er semestre) a aussi étudié les voûtes par les courbes des pressions. Mais il laisse subsister l'indétermination qu'on rencontre, dans une voûte stable et qui n'est pas à la limite de stabilité, entre les courbes possibles en nombre infini, tandis que nous déterminons parmi ces courbes la véritable au moyen du principe de la moindre résistance qui fournit la condition caractéristique de la moindre poussée possible. Cette condition est exacte non-seulement en théorie, mais dans l'application, pourvu qu'on cherche mathématiquement la courbe dans le cas des voussoirs incompressibles ; elle donne une simple approximation dans le cas des voussoirs compressibles, attendu que la loi de l'élasticité dans les réactions des voussoirs est inconnue.

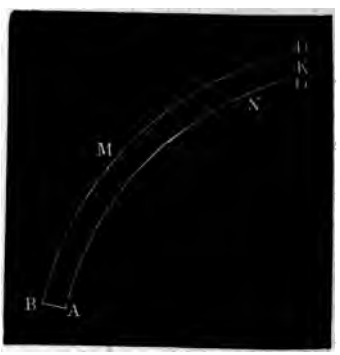
M. Méry cherche la courbe correspondant au minimum et celle correspondant au maximum de la poussée. Mais il avance sans preuve que, dans chaque demi-voûte, la première courbe doit nécessairement toucher l'extrados dans le voisinage du sommet et l'intrados près des naissances, que la seconde doit toucher l'intrados dans le voisinage du sommet et l'extrados près des naissances. Cette proposition n'est pas exacte : ainsi que nous l'avons démontré, il y a deux sortes de voûtes qui peuvent toutes deux offrir le minimum de la poussée, et sont dans des conditions opposées relativement aux

caractères dont il s'agit ; le dernier de ces caractères peut répondre aussi bien au minimum qu'au maximum de la poussée.

A cause de l'indétermination de cette vraie courbe des pressions, M. Méry se restreint à la considération de voûtes qui, eu égard à leur forme spéciale, sont à la limite de l'équilibre, et pour lesquelles, par suite, la courbe des pressions de poussée minimum et celle de poussée maximum doivent coïncider. Dans l'énumération des cas spéciaux qui se rapportent à cette hypothèse, il omet les cas représentés par les courbes CMNI (fig. 112) et KNMA (fig. 113). L'énumération a encore ceci de défectueux, qu'elle repose uniquement sur une combinaison des deux caractères appliqués ci-dessus, tandis que la combinaison des vrais caractères que nous avons présentés pour les courbes répondant au minimum ou au maximum de la poussée aurait donné une bien plus grande variété de cas d'équilibre

Fig. 112.

Fig 113.



limite. Comme les caractères des deux courbes ci-dessus définies ont été indiqués sans preuves, M. Méry ne peut pas conclure que ses courbes, qui d'après lui répondent aux limites de stabilité, sont les seules possibles dans ces voûtes, et qu'ainsi la stabilité limite y subsiste effectivement. D'ailleurs cela ne saurait être prouvé, car le fait n'est pas vrai dans toute la généralité qu'on lui veut attribuer. Par exemple, le cas où une courbe des pressions passerait par les deux points extérieurs de la clef et des naissances, et toucherait en même temps l'intrados en un point intermédiaire N, ce cas, traité particulièrement par Méry, ne peut correspondre en général aux limites de la stabilité : car, du moment que le point B (fig. 114)

est plus haut que le point N, il y a encore une infinité de courbes des pressions, comme I'K', qui demeurent dans l'intérieur de l'arc, et qui peuvent ainsi maintenir en équilibre la voûte proposée.

3. M. Hagen. (*Uber Form und Stärke gewölbter Bogen*, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1844) fonde également la théorie des voûtes sur la considération de la courbe des pressions; il fixe une fois pour toutes le point d'application de la poussée à la clef au milieu de la clef et le point inférieur de la courbe des pressions au milieu du joint de naissance, et exige en outre que cette courbe passe par les milieux de tous les joints, voulant obtenir ainsi la plus grande stabilité possible.

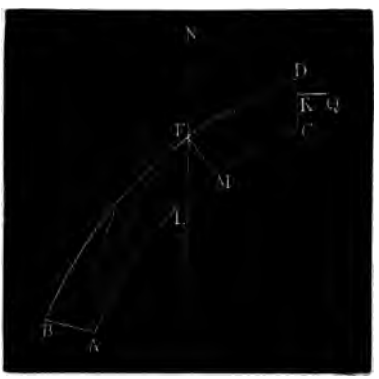
Fig. 111.

Quand, dans une voûte, on peut construire une courbe passant par les milieux de la clef et du joint de culée, et ne sortant en aucun point de l'épaisseur de la voûte, assurément c'est une courbe des pressions *possible*. Mais il ne s'ensuit nullement qu'elle soit la véritable et que la poussée correspondante existe réellement. De plus, cette hypothèse laisse échapper presque complétement la diversité des phénomènes touchant la position et le nombre des joints de rupture, et l'on ne connaît plus le mode de destruction des voûtes instables. Au reste, il résulte de ce que nous avons vu plus haut qu'une voûte, pour laquelle on peut imaginer une courbe des pressions passant par le milieu des joints, est stable en ce qui concerne la rotation des voussoirs autour de leurs arêtes, quelle que soit la compressibilité de la matière des voussoirs. Quand donc la voûte est de dimensions telles que cette condition soit satisfaite, on peut bien dans la pratique compter sur la plus grande stabilité possible contre la rotation ; mais comme la vraie courbe des pressions s'éloignera toujours en un grand nombre de points du milieu des joints, et que, par conséquent, la pression n'est pas du tout uniformément répartie dans les joints, il s'ensuit que le danger d'écrasement des voussoirs n'est nullement conjuré, si l'on ne donne à la voûte ainsi déterminée que l'épaisseur qui suffirait, d'après M. Hagen, pour assurer la stabilité : épaisseur qui serait suffisante, si les pressions résultantes sur es joints passaient partout au milieu des joints.

On doit encore remarquer que, pour construire approximative-

ment une courbe des pressions dont le point d'application K à la clef est donné (fig. 115), et qui répond à une poussée Q, l'auteur commence par substituer au poids d'un voussoir quelconque CDFM celui de CDFL qui en diffère peu, FL étant la verticale du point F. Cette substitution conduit à négliger la petite masse triangulaire MFL ; la grandeur et la direction de la pression agissant contre MF n'en sont pas en général beaucoup changées ; c'est pourquoi nous avions adopté cette simplification dans nos premières recherches, et ce n'est que plus tard que nous avons été conduit, par l'étude de voûtes tout à fait irrégulières, à introduire une correction qui est souvent nécessaire. Mais ensuite M. Hagen, déterminant le point de la courbe des pressions qui correspond au poids du voussoir CDFL, le place à l'intersection de la pression avec la verticale LF et non avec le joint MF : d'où résulte une erreur dont l'importance ne se mesure pas au rapport des masses MFL, CDFM, mais peut devenir telle que l'on soit conduit à prendre pour la courbe des pressions une courbe qui n'a avec elle aucune analogie.

Fig. 115.



4. M. Weisbach (*Lehrbuch der Ingenieur — und Maschinen — Mechanik*, 2e partie) emploie simultanément, dans l'étude de la théorie des voûtes, la chaînette et la courbe des pressions, qu'il paraît regarder comme identiques : cela résulte du moins des figures des paragraphes 16, 17, 18, et de la commune dénomination de ligne de pression (*Drucklinie*) qu'il leur donne. Cependant il consacre la seconde à l'équilibre de rotation, la première à l'équilibre de glissement. Mais on a signalé plus haut la différence importante qui existe entre ces deux courbes et le rôle que joue dans la théorie des voûtes la chaînette, qui n'a nullement besoin de demeurer dans l'épaisseur de la voûte.

M. Weisbach se borne, en ce qui concerne l'équilibre de rotation, à établir un seul principe général, savoir : dans une voûte stable il doit y avoir au moins une courbe des pressions qui ne sorte pas de l'épaisseur de la voûte. C'est incontestable, mais cela n'apprend rien sur la vraie courbe des pressions, sur le maximum et le

minimum de la poussée, et sur la nature spéciale de l'équilibre qui se produit. Il donne pour l'instabilité le caractère inadmissible que voici : Si les lignes de pression coupent l'intrados, la rupture aura lieu en dedans; si elles coupent l'extrados, la rupture aura lieu en dehors. Or on sait que dans une voûte instable, aussi bien que dans toute voûte stable, il y a des lignes de pression qui coupent l'intrados et l'extrados à la fois ; en outre, dans une voûte qui se rompt, il y a toujours rotation partielle en dedans, rotation partielle en dehors, et ces deux rotations peuvent se combiner, comme on sait, de beaucoup de manières. Enfin, la figure donnée par M. Weisbach (fig. 116) ne saurait représenter la manière dont la rupture se fera dans le premier des cas particuliers considérés; car jamais une voûte ne se rompra comme l'indique la courbe DI, courbe que l'on peut tracer dans toute voûte stable, en donnant à la poussée en D une assez petite valeur. La courbe CI de la figure 117 donnée aussi par M. Weisbach ne peut pas davantage représenter le second cas de rupture, attendu qu'elle peut être tracée dans toute voûte stable, en donnant à la poussée une assez grande valeur.

Fig. 116.

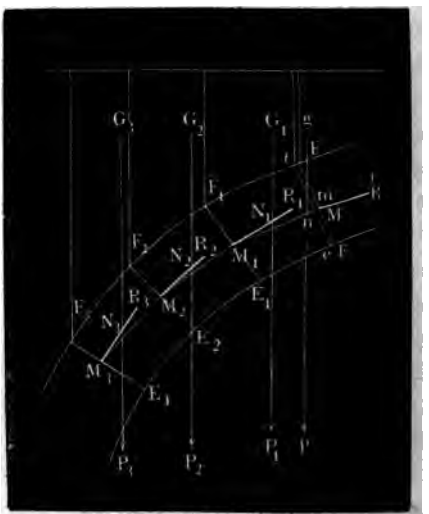
Fig. 117.

5. M. Barlow (*The civil engineer and architect's Journal*, juillet 1847), adopte la théorie de Moseley, mais il confond la courbe des pressions avec la *courbe-enveloppe* des pressions, laquelle est une chaînette ou un polygone funiculaire, et il prétend prouver par l'expérience l'identité de ces deux courbes.

On a vu plus haut que le polygone funiculaire ou la chaînette ne doit pas être confondu avec la courbe des pressions : leur distinction condamne la proposition de M. Barlow. Cet auteur décrit une expérience faite sur une voûte en plein cintre composée de dix-huit voussoirs égaux extradossés parallèlement; son épaisseur était telle que la voûte était à l'état d'équilibre limite, et que la vraie courbe des pressions passait par les points supérieurs de la clef et des naissances, et touchait l'intrados dans l'intervalle. Cette voûte présentait la disposition de la figure 118. $MN_1N_2N_3$... est le polygone funicu-

laire que M. Barlow confond avec la courbe des pressions $MM_1M_2M_3$... Ce polygone est tel, que ses côtés N_1N_2, N_2N_3..., coupent les joints correspondants E_1F_1, E_2F_2... en des points M_1, M_2, qui se trouvent dans l'épaisseur de la voûte : d'où il suit que la voûte est en équilibre, sans que $MM_1M_2M_3$... soit pour cela la vraie courbe des pressions correspondant au minimum de la poussée. Si maintenant on suppose que les points extrêmes de la courbe $MM_1M_2M_3$... sont aux points supérieurs de la clef et des naissances, cette courbe devient, sous les conditions particulières qui résultent des dimensions adoptées, la vraie courbe des pressions ; mais elle diffère toujours, plus ou moins suivant les circonstances, mais d'une quantité finie, du polygone funiculaire correspondant.

Fig. 118.



M. Barlow trouve, dans l'expérience citée, que le polygone funiculaire $MN_1N_2N_3$... est le même, sauf renversement, que celui que forme un fil flexible chargé des mêmes poids : cela prouve seulement que, dans le cas particulier considéré, le polygone funiculaire correspondant à la courbe des pressions demeure dans l'épaisseur de la voûte, qu'il se termine à l'extrados, tant à la clef qu'aux naissances, et qu'entre ces deux points il y a contact avec l'intrados. Ce fait, qui résulte déjà des lois de l'équilibre des voûtes comme cas particulier, n'avait pas besoin d'être établi par expériences ; et l'on tombe dans l'erreur si l'on en veut tirer des conséquences générales.

Au reste, le mémoire de M. Barlow s'attache surtout au cas où la vraie courbe des pressions part du sommet de la clef, seul cas examiné déjà par Moseley ; mais on n'y trouve ni la vraie condition d'existence de ce cas, ni son étendue effective.

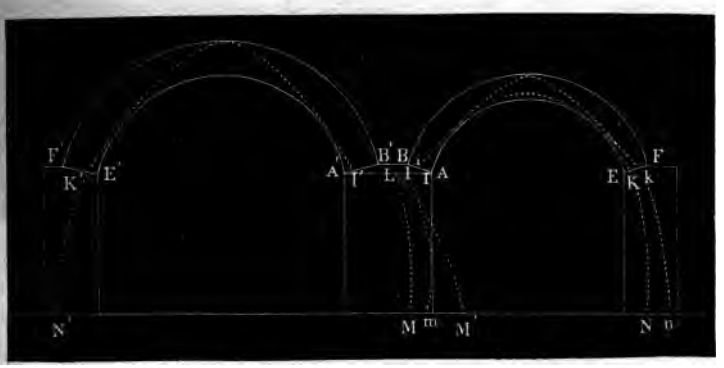
M. Barlow remarque en outre qu'il peut provenir d'une voûte voisine une pression de dehors en dedans pour la voûte considérée. Il attache beaucoup d'importance à l'étude du cas où des voûtes non

identiques viennent s'appuyer contre une même pile : il ne pousse pas d'ailleurs cette étude jusqu'au bout. Il est superflu de prouver l'importance pratique d'une telle recherche, laquelle comprend aussi le cas fréquent où deux arcs égaux sont inégalement chargés.

Les remarques suivantes serviront de guide pour l'éclaircissement de ces cas, dans le détail desquels nous ne saurions entrer ici.

Soient (fig. 119) ABFE, A'B'F'E', deux voûtes différentes qui 'appuient contre une pile commune par les surfaces AB, A'B'; oient IK, I'K' les courbes des pressions correspondant dans les eux arcs à un minimum de la poussée : ces courbes se continuent ans les piles extérieures suivant les courbes KN, K'N'. La réunion es pressions agissant en I, I' avec les poids des parties successives, joints horizontaux, de la pile du milieu BB'M, détermine dans cette

Fig. 119.



ɔile une courbe des pressions LM, qui serait une verticale si les leux voûtes étaient égales de forme et de charge, et qui est une ɔourbe dans le cas contraire. Tant que cette courbe se trouve tout ɜntière dans l'intérieur de la pile, il n'y a aucune tendance à la roation autour d'une arête de joint ; si, en même temps, l'angle de la ıormale à chaque joint avec la pression sur ce joint est inférieur à 'angle du frottement (ce qui aura presque toujours lieu), la pile est ıussi en sûreté contre le glissement. Alors, malgré l'inégalité des ɔoussées des deux voûtes, il n'y a aucune raison de cesser de conidérer les courbes IK, I'K', qui répondent aux minimums des ɔoussées respectives, comme les vraies courbes des pressions. Si, au ɔntraire, la courbe des pressions de la pile tombait en partie en

dehors, comme LM′, il s'ensuivrait nécessairement des changements dans les autres courbes. La pile alors, sous la plus petite poussée de la voûte ABFE, ne serait plus en état de résister à celle de A′B′F′E′; cette dernière poussée conduit donc à une poussée de la première voûte plus grande que celle qui répond à la courbe IK. Toutefois, d'après le principe de la moindre résistance, la poussée de la voûte ABFE demeurera aussi petite que possible. On satisfera à cette condition par la plus faible augmentation de la poussée de ABFE qui soit capable de ramener la courbe des pressions de la pile dans l'épaisseur de cette pile, comme par exemple *lm*[1]. De la sorte, la courbe I′K′ de la voûte A′B′F′E′ ne change pas, et celle IKN de ABFE se transforme en une autre telle que *ikn*, qui répond à une poussée plus forte que la poussée minimum qui répondrait à l'arc isolé.

Les considérations qui précèdent sur les principales théories des voûtes feraient justice des nombreuses observations contradictoires qui se sont produites, après la lecture du mémoire de M. Barlow, au sein de l'Institut des ingénieurs civils de Londres, et que l'on trouvera dans le *Civil engineer and architect's Journal* (août 1847).

6. M. Carvallo (*Étude sur la stabilité des voûtes*, dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1853), fonde aussi sa théorie sur les courbes des pressions, mais d'une manière tout à fait imparfaite et insuffisante.

Pour éviter les difficultés que présente l'application de l'analyse aux courbes des pressions, il substitue aux joints inclinés réels des joints verticaux fictifs, changement que nous avons déjà critiqué plus haut, en rappelant l'expérience de M. Hagen, et qui ne peut que conduire à des résultats fautifs. Un de ces faux résultats, qui se déduit tout naturellement de l'hypothèse des joints verticaux, est que la courbe des pressions d'une voûte chargée est indépendante de la forme de l'extrados[2].

[1] Remarquons que cette courbe n'aura la forme *lm* que dans le cas très-exceptionnel de pressions horizontales appliquées à la face gauche de la pile. En général, la courbe s'obtiendra par la composition de la résultante des deux poussées avec le poids des tranches successives. Cette courbe sera alors une logarithmique n'ayant sa tangente verticale qu'à l'infini. La courbe *lm* ne sera donc pas tangente à la face droite de la pile, mais elle passera par le point inférieur de cette face. Cela ne change rien du reste aux observations de l'auteur.

[2] Le théorème que M. Carvallo établit, avec le secours du calcul intégral, est

Le principe de la moindre résistance de Moseley et la condition qui en découle pour la vraie courbe des pressions sont inconnus à M. Carvallo. Ayant à traiter quelques cas particuliers, peu nombreux et sans lien rationnel, il a recours, pour déterminer le point d'application de la poussée, non aux principes, mais aux expériences. Ainsi tout ce travail se réduit à la recherche de certaines courbes des pressions possibles, et comme cette recherche s'applique à un système de joints fictifs, les résultats obtenus n'ont aucune importance pour la vraie théorie des voûtes, et sont très-loin d'éclaircir les apparences diverses que peuvent offrir les voûtes de formes variées. Même pour des cas très-simples, tels que celui des ogives, il admet, à défaut de principes, des conditions arbitraires qui conduisent à des hypothèses et à des formules absolument fausses. Dans tout le mémoire il n'est jamais question que d'un seul joint de rupture, par là on peut juger du peu de valeur de l'ouvrage.

Ainsi, au n° 14 de cet écrit, on admet que, dans une ogive, la courbe des pressions touche l'intrados au sommet et l'extrados au joint de rupture, tandis que, dans une telle voûte, il y a deux joints de rupture et deux contacts avec l'intrados et l'extrados, et que la courbe s'approche à la clef, suivant la forme et la charge, tantôt de l'intrados, tantôt de l'extrados, circonstance indifférente pour la position des joints de rupture.

Aux n°s 14 et 19 on affirme aussi, ce qui est faux, que l'on peut construire des voûtes dans lesquelles les courbes des pressions et les joints de rupture occupent telles places que l'on veut.

celui-ci : Si la voûte est surmontée de tympans en maçonnerie, identiques à la matière des voussoirs, et que l'on suppose les joints des voussoirs verticaux, la courbe des pressions est indépendante de l'extrados. Cette proposition est aussi évidente qu'inutile. Elle se déduit en effet immédiatement de l'hypothèse des joints verticaux, et elle est inutile, car cette hypothèse fausse complétement les conditions de stabilité des voûtes. Les longs calculs qui terminent le mémoire de M. Carvallo ont donc été faits en pure perte. Il est pénible de penser combien d'esprits distingués se fourvoient dans les questions de mécanique parce qu'ils veulent simplement y chercher des problèmes d'analyse, et qu'ils croient trouver dans les résultats de leurs formules des principes fondés sur la nature des choses, sans avoir commencé par introduire ces principes mêmes dans les calculs.

« Rien, dit Poinsot, ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous rendre bien compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. »

M. Carvallo s'appuie particulièrement sur l'hypothèse de Navier, relativement à la répartition des pressions sur la surface des joints, et il en conclut que la courbe des pressions peut en réalité s'approcher des courbes-contours de la voûte au plus à une distance égale au tiers de l'épaisseur du joint; dans le cas d'un plus grand rapprochement de l'une des courbes-contours, les points voisins de l'autre subiraient des pressions négatives ou forces répulsives, ce qui veut dire que la rupture s'ensuivrait. Je ne fais aucun cas de cette hypothèse, précisément parce que ce n'est qu'une hypothèse sans fondement; je la crois approximativement vraie dans certains cas, mais fausse dans d'autres, et range parmi les absurdités la conséquence ci-dessus énoncée de cette hypothèse.

Ainsi qu'on le voit par les voûtes dont les joints s'entr'ouvrent, la dureté des voussoirs de pierre peut fort bien permettre à une courbe des pressions d'arriver presque au contact des courbes-contours, et, si cela est possible, il doit en être ainsi approximativement aux points de rupture dans les voûtes dont les joints demeurent fermés, attendu que ce contact répond au principe de la moindre résistance. Il peut se produire, comme le montre la figure 120, une compression qui réduise la surface pressée à une faible partie *ab* de la surface du joint, sans qu'il se produise en *bc* des efforts négatifs. L'inexactitude de cette hypothèse, en général, résulte d'ailleurs de ce fait qu'elle ne dépend pas de la direction de la force P, tandis que cette direction doit exercer une influence sérieuse sur la répartition des pressions.

Fig. 120.

En admettant le contact entre la courbe des pressions et les courbes-contours, on s'approche assurément beaucoup de la vérité, boaucoup plus que par l'hypothèse de M. Carvallo, qui porte à un tiers de l'épaisseur du joint la distance minimum de ces deux lignes. Aucune expérience ne confirme cette dernière hypothèse, tandis qu'il y en a à l'appui du contact approximatif; car, en partant de l'hypothèse du contact, on trouve théoriquement qu'un plein cintre non chargé demeure en équilibre quand le rayon ne dépasse pas neuf fois l'épaisseur de l'arc; or la pratique confirme ce résultat. Si la limite du tiers de l'épaisseur du joint était imposée au rapprochement des courbes, l'équilibre exigerait un rayon au plus triple

de l'épaisseur de la voûte, résultat contredit à chaque instant par l'expérience. Donc l'hypothèse qui lui sert de base est tout à fait inexacte.

Nous avons déjà dit qu'on peut tirer la même conclusion de l'examen des joints qui s'ouvrent dans les voûtes défectueuses.

Si, dans un cas particulier, on a affaire à des matériaux peu résistants, nous avons vu plus haut (§ 21) comment on garantit la voûte par une augmentation convenable d'épaisseur ou bien en en changeant la forme, de telle sorte que la ligne des milieux des joints soit une courbe des pressions possible, sans pour cela s'imaginer que cette courbe *possible* soit aussi la courbe des pressions réelle.

M. Carvallo prescrit de faire travailler les matériaux au dixième de la charge de rupture, en supposant la pression uniformément répartie sur la surface du joint : cette prescription n'est nullement pratique, soit parce qu'en général cette pression est beaucoup plus faible dans les applications, soit parce qu'elle varie dans des limites étendues, suivant les dimensions et la forme des voûtes.

Ces trop nombreuses erreurs sont habillées en formules transcendantes, qui ont pour effet d'imposer aux yeux inexpérimentés, mais aussi d'annuler l'utilité que les ingénieurs pourraient en tirer dans la pratique des constructions. En outre, cet ouvrage n'étudie que les voûtes à moitié symétriques : nouvelle raison pour en signaler le manque de généralité.

Les grands éloges que donne M. Poncelet, dans son *Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes* (Compte rendu de l'Académie des sciences, tome XXXV, 11, 18, 26 octobre et 2 novembre 1852 [1]) à cette théorie si défectueuse de M. Carvallo, sont en désaccord flagrant avec la vérité scientifique, sur laquelle beaucoup d'auteurs plus anciens, qui partaient du même point de vue que M. Carvallo, notamment Moseley et Méry, avaient déjà projeté une bien plus vive lumière.

Des considérations de M. Poncelet, particulièrement de ses remarques sur la détermination de la vraie poussée et de la vraie courbe des pressions, il résulte que M. Poncelet lui-même ne se rend pas clairement compte de la véritable nature des forces appliquées à une voûte. Cela ressort, par exemple, de cette proposition

[1] Cet *Examen* a été aussi tiré à part. Bachelier, 1852.

énoncée à la page 42 de son *Examen historique*, que, pour établir une voûte le plus économiquement possible, il faut faire en sorte que la vraie courbe des pressions passe par les milieux des joints, ce qui est positivement impossible.

Mon mémoire sur la théorie des voûtes dans le journal de Crelle a aussi eu l'honneur d'être cité avec éloge par M. Poncelet[1]. Mais

[1] Voici en quels termes s'exprime M. Poncelet dans son *Examen historique* déjà cité :

« Ces nouvelles recherches, qui ont paru en allemand dans le tome XXIX, 3e cahier du *Journal des constructions* de M. Crelle, concernent plutôt le point de vue théorique et abstrait de la question des voûtes que ses applications pratiques à l'art de l'ingénieur. Il s'agit, en un mot, de généraliser, en les rectifiant et complétant en quelques points, les principes qui ont servi de base aux théories existantes, en considérant que, dans l'état d'équilibre d'une voûte, la résultante des pressions sur le joint vertical de la clef doit satisfaire à la condition du minimum, d'après un principe mis en avant par M. Moseley (*Philosophical Magazine*, octobre 1833), sous le nom de principe de moindre résistance, et dont M. Scheffler a ensuite étendu et mis dans son jour la véritable signification dans un précédent mémoire inséré au tome XXVIII du journal déjà cité de M. Crelle.

« Ce principe, dont l'énoncé, assez évident en lui-même, pourrait être généralisé, ne diffère pas, quant au fond, de celui dont Coulomb a offert, dans son mémoire de 1783, de si belles applications aux théories de la résistance des solides, de la poussée des terres et des voûtes, toute la difficulté étant seulement d'en tirer, sans trop de tâtonnements ou de calculs, des conséquences exactes relatives à la forme et à la position de la ligne des pressions en dehors du cas où elle est supposée devoir passer par certains points donnés *à priori*, ainsi que l'avaient fait auparavant MM. Moseley et Méry en se plaçant franchement dans les conditions de l'équilibre strict envisagées par Coulomb comme de simples limites à la stabilité des voûtes. Or c'est là précisément ce que se propose de faire M. Scheffler, tout en restant dans l'hypothèse de l'incompressibilité parfaite des voussoirs, et sans rien emprunter à l'expérience non plus qu'aux données antérieurement acquises sur les différents modes de rupture des voûtes. . . . .

« Cette détermination toute géométrique (de la courbe des pressions), à nos yeux le point capital du mémoire, exigeant pour ainsi dire un nombre illimité de constructions ou de tâtonnements, rend la méthode à peu près illusoire dans ses applications à la pratique. »

Aux observations que présente M. Scheffler sur cet exposé de M. Poncelet, nous ajouterons une seule remarque. Le savant académicien, qui est à tant de titres le légitime successeur de Coulomb, attribue à son illustre devancier le principe de la moindre résistance. Nous n'avons pu découvrir aucun mémoire de Coulomb portant la date de 1783 ; si, comme il est probable, il s'agit ici de celui de 1773, nous devons dire qu'il nous a été impossible de trouver trace de

l'éloge porte sur des points accessoires qui méritaient à peine d'être relevés ; le fond du mémoire n'est pas mentionné. Par exemple, M. Poncelet dit (page 26) que ma méthode graphique pour la détermination de la courbe des pressions, laquelle est à ses yeux la partie capitale de mon mémoire, rend presque illusoire l'application pratique de ma théorie, parce qu'elle exige une infinité de constructions ou de tâtonnements. Je dois croire que le sens vrai du mémoire lui a échappé à une lecture trop rapide. Les nombreux exemples développés plus haut, même pour les formes et les charges les plus compliquées, montrent clairement que quiconque a une teinture des mathématiques peut appliquer cette théorie sans peine et avec la plus grande rapidité ; qu'ainsi cette méthode est, pratiquement, la plus simple de toutes. Ces exemples établissent, de plus, que cette théorie est appropriée à la solution de tous les problèmes relatifs aux voûtes, et s'applique aux systèmes les plus simples ou les plus compliqués, avec une égale facilité. Pour ce qui concerne les constructions sans fin, que le lecteur n'a sûrement pas remarquées dans les exemples ci-dessus, ni par conséquent jugé nécessaires, un instant de réflexion montre que ce même reproche peut s'appliquer à la détermination de toute grandeur incommensurable, par exemple à l'extraction des racines carrées, qui exige aussi un nombre infini d'opérations, si l'on veut une exactitude absolue. Ce reproche n'a donc pas de sens.

7. M. Hoffmann a publié récemment un ouvrage (*Uber Form und Stärke gewölbter Bogen*, 1853) qui rentre dans la catégorie de ceux dont il a été parlé dans le paragraphe précédent, puisqu'il emploie la considération de lignes articulées. Il commence par reproduire les propositions connues sur le mode d'équilibre possible d'une

l'emploi du principe de la moindre résistance, bien que l'ordre d'idées où se place Coulomb soit le même qui a servi de base à ce principe. Si Coulomb l'avait possédé, n'aurait-il pas levé l'indétermination dont il se débarrasse en se restreignant à l'équilibre limite ? Mais il y a plus : M. Poncelet trouve l'énoncé de ce principe *assez évident*. Nous craignons bien que le lecteur français ne le trouve encore un peu trop métaphysique, malgré les explications données au commencement de cet ouvrage. Enfin, si, comme l'annonce M. Poncelet, ce principe est susceptible d'être généralisé, cette généralisation serait bien désirable à tous égards et devrait tenter les esprits chercheurs. N'oublions pas, en effet, qu'à côté des voûtes droites que nous venons d'étudier se trouve la nombreuse famille des arches biaises, indéfiniment variée. Il y a là une voie de recherches à peine abordée jusqu'ici.

rangée de prismes s'appuyant les uns sur les autres. Ces théorèmes sont sans importance pour la théorie des voûtes : ils établissent en effet la possibilité d'un groupe de forces sous certaines conditions, et nullement la réalité de l'existence d'un certain groupe de forces sous les conditions données d'une voûte. Il n'est là question ni de minimum de poussée, ni de joint de rupture, ni d'aucune distinction des formes de voûtes suivant les divers contacts des courbes-contours et de celle des pressions, ni d'un caractère indiquant le mode de rupture d'une voûte instable; en résumé, aucun des points principaux que doit traiter une théorie des voûtes n'est abordé.

Cet ouvrage ne s'occupe pas non plus de l'épaisseur des culées, mais seulement de celle de la voûte. A cet effet, il part tout simplement de la pression supposée répartie uniformément sur les joints, et déterminée par les formules de la résistance des matériaux. Mais il est avéré qu'il n'y a nullement répartition uniforme des pressions sur les joints, et en outre nous avons prouvé au paragraphe 22 que, dans la pratique, il n'y a pas lieu de considérer pour toutes les voûtes une seule et même fraction de la résistance limite, car la pression par mètre carré atteint, dans les grandes arches, de dix à vingt fois la valeur qu'elle a dans les petites [1].

[1] Nous ne croyons pas pouvoir passer sous silence le mémoire de M Yvon Villarceau, publié d'abord dans le tome XII du *Recueil des savants étrangers*, et ensuite à part chez Bachelier, 1854. En outre, la *Revue de l'architecture et des travaux publics* de M. César Daly a publié en 1859 (17e volume), un mémoire intéressant de M. Denfert-Rochereau, capitaine du génie, sur ce même sujet des voûtes. Voici comment ce dernier apprécie, au commencement de son mémoire, le travail du premier :

« M. Yvon Villarceau admet que les matériaux superposés à la voûte peuvent, par certains artifices de construction, presser comme un liquide de densité égale à la leur, c'est-à-dire exercer sur chaque voussoir des actions normales à l'extrados avec une intensité proportionnelle à la hauteur de l'horizontale qui limite le remplissage du pont au-dessus de ce voussoir. Il part ensuite de là pour établir les équations générales de l'équilibre, de manière que la résultante des efforts appliqués sur chaque voussoir passe par le centre de gravité du voussoir, en étant en chaque point tangente à la courbe des centres de gravité, et, par conséquent, normale aux divers joints tracés suivant le rayon de courbure de cette courbe. Comme la courbe des centres de gravité est toujours très-voisine de celle du milieu des joints, et que l'on peut, par un petit refouillement très-peu important à l'intrados, les faire réellement coïncider, M. Yvon Villarceau obtient évidemment, par la répartition d'efforts

qu'il suppose, une forme de voûte dont la stabilité n'exige ni l'intervention des frottements, ni la cohésion du mortier, et qui exerce en chaque point des matériaux une égale pression. De plus, cette voûte, douée d'une grande roideur, ne devra présenter, pour des matériaux très-peu élastiques comme les pierres, qu'un très-faible abaissement quand on décintrera. Elle aura partout une même épaisseur qui sera calculée sur l'énergie de résistance qu'on peut développer dans les matériaux sans altérer leur élasticité.

« On doit reconnaître, au point de vue de l'art, une grande supériorité à la solution de M. Yvon Villarceau sur celle de M. Carvallo. La marche suivie par M. Yvon Villarceau conduit, en effet, à des voûtes dont la forme, indépendante de la matière employée, caractérise l'homogénéité de résistance. La résistance propre de la matière est très-nettement définie par l'épaisseur de la voûte. Nous rencontrons donc là deux conditions d'une solution à la fois artistique et économique, forme propre et manifestation d'un module capable de servir d'échelle de comparaison.

« L'appel à des considérations hypothétiques sur les réactions moléculaires des corps et le défaut de tout caractère architectonique forment le côté faible de la solution de M. Carvallo. Mais nous sommes pour M. Carvallo contre M. Yvon Villarceau, en ce que le premier admet que l'extrados est soumis à des actions verticales, tandis que le second admet que cet extrados est soumis en chaque point à des actions normales aux éléments de sa surface. »

Après quoi, M. Denfert-Rochereau prouve fort bien que la pression s'exerce en réalité verticalement et non normalement sur l'extrados.

Inutile maintenant de faire observer combien les prétentions mises en avant par M. Yvon Villarceau sont inadmissibles : cette courbe des pressions passant par le centre de gravité des voussoirs, normale aux joints, cette répartition uniforme des pressions dans chaque joint sont purement imaginaires et ne peuvent se réaliser dans aucun cas. Telle est la solution obtenue à la suite d'énormes calculs, exigeant un mémoire explicatif de plus de 300 pages pour ne traiter que le cas le plus simple. Il semble que le désir d'utiliser les intégrales elliptiques dans la science des constructions a seul dû conduire les commissaires de l'Académie des sciences à récompenser ce travail, si inutile pour le progrès de la théorie et, à plus forte raison, pour la pratique.

M Denfert-Rochereau a plus finement analysé les conditions du problème. Il a reconnu que ses devanciers se donnaient d'avance un trop grand nombre de conditions. Au lieu de quatre, il s'est restreint à trois :

1° Que la courbe moyenne soit une courbe des pressions possible, ce qui lui donne une chaînette ;

2° Que la pression par unité superficielle soit la même dans tous les joints, ce qui conduit à donner aux joints des longueurs proportionnelles à l'intensité des pressions ;

3° Que cette pression constante égale un nombre déterminé de kilogrammes par centimètre carré.

Cela fait, il vérifie *à posteriori* que la pression fait avec la normale à chaque joint un petit angle ; tandis que M. Villarceau ajoutait à toutes les conditions précédentes celle de la normalité.

Le mémoire de M. Denfert-Rochereau a donc une valeur théorique et pratique bien supérieure à celle des précédents.

Si l'on ne considère pas sa méthode comme donnant la courbe véritable des pressions, mais bien comme un procédé donnant aux voûtes une grande stabilité, nous croyons qu'on peut regarder son but comme atteint. Dans tous les cas, son très-ingénieux mémoire sera lu avec intérêt par ceux qui s'occupent de ces questions. Ce mémoire n'a pas été l'objet d'un rapport à l'Institut, à qui il avait été soumis ; il a été retiré après deux ou trois ans par son auteur, las d'attendre un trop lent rapport.

CHAPITRE IV.

TABLES DES ÉPAISSEURS DES VOUTES ET DES CULÉES.

§ 66. — Explication des tables.

Les règles données au paragraphe 22 pour déterminer l'épaisseur des voûtes à la clef et aux naissances, eu égard à la résistance des matériaux, conduisent à des dimensions qui assurent une suffisante stabilité par rapport à la rotation et au glissement, lorsqu'il s'agit de voûtes circulaires et qu'on ne s'écarte pas des cas d'application ordinaire. Il y a donc un intérêt particulier à calculer d'après ces règles des tables qui donnent les dimensions à employer en pratique dans les cas dont il s'agit.

Il est également utile de calculer d'avance les épaisseurs de culée pour chaque cas spécial, et d'en dresser des tables générales qui donnent ces épaisseurs pour les différents degrés de stabilité que l'on peut demander.

Les praticiens accueilleront donc avec plaisir les tables qui suivent, calculées d'après les formules et les règles développées dans cet ouvrage ; ces tables, précédées des explications qu'on va lire, ont été remises comme *Instruction pratique* aux ingénieurs des chemins de fer du duché de Brunswick.

1. Notations.

Dans les tables qui suivent on a adopté les notations que voici (fig. 121) :

$2a$, ouverture ;

b, flèche de l'intrados ;

r, rayon de l'intrados ;

β, angle du joint de naissance avec la verticale ;

c, épaisseur à la clef ;

d, épaisseur aux naissances ;

δ, projection horizontale du joint de naissance ;

e, épaisseur de la culée, mesurée à partir de l'intrados ;

f, hauteur de la culée depuis la naissance de l'arc jusqu'au niveau de fondation considéré comme absolument fixe ;

Fig. 121.

h, hauteur de la charge au sommet de la voûte au-dessus de l'extrados.

L'unité de mesure est le mètre [1].

2. Explication sur la charge h.

On admet que la charge est arasée horizontalement au-dessus de la voûte et est formée d'un massif de maçonnerie de densité égale à celle des voussoirs.

Si, au contraire, la voûte était, par exemple, chargée de terre, on prendrait pour h la hauteur d'un massif de maçonnerie dont le poids fût égal à celui de la charge.

Dans les ponts-route sans charge de remblai, qui n'ont à porter que la chaussée et les surcharges accidentelles ordinaires, on peut prendre $h = 0^{m},60$.

Pour les viaducs de chemins de fer, à raison des surcharges dues au passage des trains, on augmentera la hauteur h, de manière qu'elle soit au moins de $1^{m},50$.

[1] Les tables originales sont calculées en prenant pour unité le pied Indépendamment de notre travail de conversion, nous avons cherché à rendre ces tables plus commodes :

1° En supprimant la colonne qui contient les épaisseurs des culées dans l'hypothèse d'un coefficent de stabilité égal à 1 (équilibre limite). L'auteur dit lui-même que ces nombres n'offrent qu'un intérêt purement scientifique.

2° En introduisant dans la table les nombres qui doivent être définitivement employés à la suite de quatre ordres de corrections indiqués ci-après, et que l'auteur a préféré laisser apparents. Cela vaut mieux au point de vue théorique; pour les applications ce peut être une cause d'hésitation.

Sur les indications de l'auteur, nous avons effectué dans les tables la correction de quelques fautes de calcul ou d'impression qui se rencontraient dans l'ouvrage allemand.

3. Explication sur les épaisseurs *c* et *d*.

Dans l'évaluation des épaisseurs *c* et *d*, on a admis qu'il s'agit d'une voûte en matériaux équarris de grès dur ou de calcaire dur, et que l'on peut soumettre ces matériaux dans les grands ponts à une pression moyenne équivalente au plus sur la clef au poids d'une colonne de pierre de 60 mètres, et sur les naissances au poids d'une colonne de 90 mètres de hauteur.

On n'admettra pas en pratique les épaisseurs inférieures à $0^m,30$. Aussi les valeurs de *c* et de *d*, plus petites que $0^m,30$, ont été remplacées dans la table par la valeur $0^m,30$.

Lorsque la table indique pour l'épaisseur de l'arc aux naissances des épaisseurs considérables (plus de $1^m,80$), on se dispense de faire chaque voussoir d'une seule pierre : on se contentera de faire les voussoirs en maçonnerie appareillée suivant les plans de joint.

Quand on emploiera des matériaux peu résistants, on devra augmenter de moitié les valeurs de *c* et *d*. La même augmentation devra être observée si l'on emploie des briques, ce qu'il sera convenable d'éviter du reste dans la construction des voûtes. Les voûtes en briques devront être construites comme une maçonnerie en liaison sur l'épaisseur entière, et non en rouleaux concentriques.

4. Explication sur l'épaisseur *e* de la culée.

Dans le calcul de *e*, on a admis que la culée forme un massif de maçonnerie limité en avant et en arrière par des plans verticaux, depuis le niveau de fondation jusqu'à la chape qui recouvre la charge.

L'obliquité donnée dans la pratique à la face postérieure de la culée et l'empatement de la fondation ne feront qu'assurer mieux encore la stabilité.

Pour les ponts-route supportant un remblai de quelque épaisseur, on adoptera le coefficient de stabilité 2. Pour les grands ponts-route qui ne portent qu'une charge de terre insignifiante, on adoptera le coefficient 2,5. Les viaducs de chemins de fer avec ballast de quelque épaisseur exigent le coefficient 2,5. Le coefficient 3 sera appliqué aux viaducs qui ne portent qu'un ballast insignifiant.

On n'admettra pas pratiquement des épaisseurs de culée inférieures à $0^m,60$; en conséquence les valeurs de *e* plus petites ont été portées à $0^m,60$. D'autre part l'épaisseur de la culée ne saurait être moindre que la projection horizontale du joint de culée de la voûte ;

ainsi toutes les valeurs de e trouvées plus petites ont été augmentées et prises égales à cette projection $\delta = \frac{ad}{r}$.

Enfin, pour des charges de grande hauteur h, l'épaisseur e de la culée ne peut être prise plus petite que celle qui répondrait à de moindres valeurs de h. Cette correction est aussi faite dans la table.

5. Piles de ponts à plusieurs arches.

On donnera aux piles intermédiaires de ponts à plusieurs arches *égales* une épaisseur moitié de celle des culées. Le minimum de l'épaisseur des piles est d'ailleurs $2 \times \frac{ad}{r}$.

TABLE I.

VOUTES EN PLEIN CINTRE.

---

ces voûtes le rapport de la flèche à l'ouverture, $\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$.

linaison des naissances sur la verticale, $\beta=90^{\circ}$.

:ojection horizontale du joint de naissance, $\delta=\frac{ad}{r}=d$.

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$b=$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,75	0,00	0,30	0,30	1,50	0,60	0 60	0,60
				3,00	0.60	0,60	0,60
				4,50	0,60	0,60	0,60
				6,00	0,60	0,60	0,60
	0,60	0,30	0,30	1,50	0,75	0,87	0,99
				3,00	0,87	0,99	1,11
				4,50	0 93	1,08	1,20
				6,00	0,99	1,11	1,23
	1,50	0,30	0,30	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,02	1,20	1,35
				4,50	1,14	1,32	1,47
				6,00	1,23	1,38	1,56
	3,00	0,30	0,30	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,38
				4,50	1,20	1,38	1,56
				6,00	1,24	1,50	1,68
	6,00	0,33	0,39	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,41
				4,50	1,26	1,47	1,65
				6,00	1,41	1,62	1,83
	9,00	0,36	0,48	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,41
				4,50	1,26	1,47	1,65
				6,00	1,41	1,65	1,83
	12,00	0,39	0,51	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,41
				4,50	1,26	1,47	1,65
				6,00	1,41	1,65	1,83
	18,00	0,42	0,66	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,41
				4,50	1,26	1,47	1,65
				6,00	1,41	1,65	1,83
	24,00	0,42	0,84	1,50	0,81	0,96	1,11
				3,00	1,05	1,23	1,41
				4,50	1,26	1,47	1,65
				6,00	1,41	1,65	1,83

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée	Hauteur de la culée au-dessous des naissances	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2.5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.
1,50	0,00	0,30	0,30	1,50	0,60	0,63	0,72
				3,00	0,60	0,72	0,81
				4,50	0,66	0,78	0,87
				6,00	0,72	0,81	0,93
	0,60	0,30	0,30	1,50	0,99	1,20	1,38
				3,00	1,20	1,41	1,59
				4,50	1,32	1,53	1,71
				6,00	1,41	1,62	1,80
	1,50	0,30	0,30	1,50	1,17	1,44	1,65
				3,00	1,47	1,74	1,95
				4,50	1,65	1,92	2,16
				6,00	1,74	2,01	2,28
	3,00	0,39	0,39	1,50	1,26	1,53	1,77
				3,00	1,62	1,92	2,19
				4,50	1,86	2,16	2,46
				6,00	2,04	2,34	2,64
	6,00	0,48	0,48	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,01	2,31
				4,50	1,98	2,34	2,67
				6,00	2,22	2,58	2,91
	9,00	0,51	0,57	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	12,00	0,57	0,69	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	18,00	0,66	0,93	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	24,00	0,72	1,08	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03

... demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
b=a	h	c	d	f	e	e	e
a.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	0,00	0,30	0,33	1.50	0,96	1,20	1,44
				3,00	1,17	1,41	1,65
				4,50	1,29	1,56	1,77
				6,00	1,41	1,65	1,86
	0,60	0,36	0,39	1,50	1,44	1,77	2,10
				3,00	1,74	2,07	2,40
				4,50	1,92	2,28	2,61
				6,00	2,07	2,43	2,73
	1,50	0,45	0,45	1,50	1,77	2,19	2,58
				3,00	2,13	2,58	2,94
				4,50	2,37	2,82	3,21
				6,00	2,58	3,00	3,42
	3,00	0,54	0,54	1,50	1,98	2,46	2,88
				3,00	2,43	2,94	3,39
				4,50	2,76	3,27	3,72
				6,00	3,00	3,54	3,99
	6,00	0,69	0,72	1,50	2,07	2,61	3,06
				3,00	2,58	3,15	3,66
				4,50	2,97	3,57	4,11
				6,00	3,30	3,90	4,47
	9,00	0,84	0,90	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,59
	12,00	0,93	1,02	1.50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4.50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62
	18,00	1,08	1,20	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62
	24,00	1,17	1,35	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
4,50	0,00	0,36	0,45	1,50	1,14	1,53	1,86
				3,00	1,44	1,80	2,13
				4,50	1,62	2,01	2,34
				6,00	1,80	2,16	2,49
	0,60	0,48	0,51	1,50	1,83	2,34	2,76
				3,00	2,16	2,64	3,09
				4,50	2,40	2,88	3,33
				6,00	2,58	3,09	3,51
	1,50	0,54	0,57	1,50	2,22	2,82	3,33
				3,00	2,64	3,21	3,75
				4,50	2,94	3,54	4,05
				6,00	3,18	3,78	4,29
	3,00	0,72	0,72	1,50	2,55	3,21	3,81
				3,00	3,03	3,69	4,32
				4,50	3,39	4,08	4,71
				6,00	3,69	4,38	5,01
	6,00	0,93	0,93	1,50	2,73	3,45	4,11
				3,00	3,27	4,02	4,74
				4,50	3,72	4,50	5,22
				6,00	4,08	4,89	5,61
	9,00	1,08	1,11	1,50	2,79	3,54	4,26
				3,00	3,36	4,17	4,89
				4,50	3,84	4,68	5,46
				6,00	4,26	5,13	5,91
	12,00	1,20	1,20	1,50	2,79	3,57	4,29
				3,00	3,39	4,23	4,98
				4,50	3,90	4,77	5,55
				6,00	4,32	5,25	6,06
	18,00	1,32	1,41	1,50	2,79	3,57	4,29
				3,00	3,39	4,23	5,01
				4,50	3,93	4,83	5,64
				6,00	4,38	5,34	6,18
	24,00	1,41	2,01	1,50	2,79	3,57	4,29
				3,00	3,39	4,23	5,01
				4,50	3,93	4,83	5,64
				6,00	4,38	5,34	6,18

...ran-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des nais ances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
=a	h	c	d	f	e	e	e
	m.	m.	m	m.	m	m.	m
00	0,00	0,45	0,54	1,50	1,53	2,04	2,46
				3,00	1,83	2,34	2,76
				4,50	2,07	2,55	3,00
				6,00	2,25	2,73	3,18
	0,60	0,57	0,60	1,50	2,13	2,76	3 30
				3,00	2 49	3,12	3,66
				4,50	2,76	3,39	3,96
				6,00	3,00	3,63	4,17
	1,50	0,69	0,72	1,50	2,61	3,33	3,99
				3,00	3,03	3,75	4,41
				4,50	3,36	4,08	4 74
				6,00	3,63	4,38	5,04
	3,00	0,90	0,90	1,50	3,03	3,87	4,62
				3,00	3,51	4,35	5,13
				4,50	3,90	4,77	5,55
				6,00	4,23	5,10	5,88
	6,00	1,14	1,14	1,50	3,36	4,29	5,13
				3,00	3,93	4,89	5,76
				4,50	4,38	5,37	6,27
				6,00	4,80	5,79	6,69
	9,00	1,26	1,26	1,50	3,51	4,50	5,37
				3,00	4,11	5,13	6,06
				4,50	4 62	5,67	6,61
				6,00	5,07	6,15	7,11
	12,00	1,35	1,35	1,50	3,57	4,59	5,52
				3 00	4,20	5,28	6 24
				4,50	4,74	5,85	6,84
				6 00	5,25	6,36	7,38
	18,00	1,47	1,98	1,50	3,57	4,59	5,52
				3,00	4,20	5,28	6,24
				4,50	4,74	5 88	6,90
				6,00	5,25	6,42	7,50
	24,00	1,53	2,82	1,50	3,57	4,59	5,52
				3,00	4 20	5,28	6,24
				4,50	4 74	5,88	6,90
				6,00	5,25	6,42	7,50

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
7,50	0,00	0,54	0,69	1,50	1,80	2,40	2,94
				3,00	2,10	2,73	3,27
				4,50	2,37	3,00	3,54
				6,00	2,58	3,21	3,75
	0,60	0,66	0,78	1,50	2,46	3,21	3,87
				3,00	2,82	3,57	4,23
				4,50	3,12	3,87	4,53
				6,00	3,36	4,11	4,80
	1,50	0,84	0,90	1,50	3,00	3,87	4,65
				3,00	3,45	4,32	5,10
				4,50	3,78	4,68	5,46
				6,00	4,08	4,98	5,70
	3,00	1,05	1,05	1,50	3,51	4,53	5,40
				3,00	4,02	5,04	5,91
				4,50	4,41	5,43	6,36
				6,00	4,77	5,79	6,72
	6,00	1,26	1,26	1,50	3,96	5,07	6,09
				3,00	4,53	5,67	6,69
				4,50	5,01	6,18	7,23
				6,00	5,43	6,63	7,71
	9,00	1,38	1,38	1,50	4,20	5,40	6,45
				3,00	4,83	6,06	7,14
				4,50	5,34	6,63	7,74
				6,00	5,82	7,11	8,28
	12,00	1,47	1,74	1,50	4,29	5,52	6,63
				3,00	4,95	6,21	7,38
				4,50	5,52	6,84	8,01
				6,00	6,03	7,38	8,58
	18,00	1,56	2,61	1,50	4,32	5,58	6,72
				3,00	4,98	6,33	7,53
				4,50	5,61	6,99	8,22
				6,00	6,15	7,59	8,85
	24,00	1,62	3,69	1,50	4,32	5,58	6,72
				3,00	4,98	6,33	7,53
				4,50	5,61	6,99	8,22
				6,00	6,15	7,59	8,85

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
9,00	0,00	0,63	0,84	1,50	2,07	2,82	3,48
				3 00	2,40	3,15	3,81
				4,50	2,70	3,45	4,11
				6,00	2,94	3,69	4,32
	0,60	0,78	0,93	1,50	2,73	3,63	4,38
				3,00	3,12	3,99	4,77
				4,50	3,45	4,32	5,10
				6,00	3,72	4,59	5,37
	1,50	0,96	1,05	1,50	3,39	4,38	5,28
				3,00	3,81	4,83	5,73
				4,50	4,17	5,19	6,12
				6,00	4,50	5,52	6,42
	3,00	1,17	1,17	1.50	3,93	5,10	6,12
				3,00	4,44	5,61	6,63
				4,50	4,86	6,03	7,08
				6,00	5,22	6,42	7,47
	6,00	1,35	1,35	1,50	4,56	5,85	7,02
				3,00	5,13	6,45	7,65
				4,50	5,64	6,99	8,19
				6,00	6,06	7,44	8,67
	9,00	1,47	1,71	1,50	4,83	6,24	7,47
				3,00	5,46	6,90	8,16
				4,50	6,03	7,47	8,79
				6,00	6,54	7,98	9,33
	12,00	1,53	2,19	1,50	4,98	6,42	7,71
				3,00	5,64	7,11	8,46
				4,50	6.21	7,74	9,12
				6,00	6,75	8,31	9,69
	18,00	1,62	3,30	1,50	5,04	6,54	7,86
				3,00	5,73	7,26	8,67
				4,50	6,36	7,95	9,39
				6,00	6,93	8,55	10,05
	24,00	1,83	4,71	1,50	5,04	6,54	7,86
				3,00	5,73	7,26	8,67
				4,50	6,36	7,95	9,39
				6,00	6,93	8,55	10,05

Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
h	*c*	*d*	*f*	*e*	*e*	*e*
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0,00	0,30	0,30	1,50	0,60	0.60	0,60
			3,00	0.60	0,60	0,60
			4,50	0,60	0,60	0,60
			6,00	0,60	0,60	0,60
0,60	0,30	0,30	1,50	0,75	0,87	0,99
			3,00	0,87	0,99	1,11
			4,50	0 93	1,08	1,20
			6,00	0,99	1,11	1,23
1,50	0,30	0,30	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,02	1,20	1,35
			4,50	1,14	1,32	1,47
			6,00	1,23	1,38	1,56
3,00	0,30	0,30	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,38
			4,50	1,20	1,38	1,56
			6,00	1,24	1,50	1,68
6,00	0,33	0,39	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,41
			4,50	1,26	1,47	1,65
			6,00	1,41	1,62	1,83
9,00	0,36	0,48	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,41
			4,50	1,26	1,47	1,65
			6,00	1,41	1,65	1,83
12,00	0,39	0,51	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,41
			4,50	1,26	1,47	1,65
			6,00	1,41	1,65	1,83
18,00	0,42	0,66	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,41
			4,50	1,26	1,47	1,65
			6,00	1,41	1,65	1,83
24,00	0,42	0,84	1,50	0,81	0,96	1,11
			3,00	1,05	1,23	1,41
			4,50	1,26	1,47	1,65
			6,00	1,41	1,65	1,83

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.
1,50	0,00	0,30	0,30	1,50	0,60	0,63	0,72
				3,00	0,60	0,72	0,81
				4,50	0,66	0,78	0,87
				6,00	0,72	0,81	0,93
	0,60	0,30	0,30	1,50	0,99	1,20	1,38
				3,00	1,20	1,41	1,59
				4,50	1,32	1,53	1,71
				6,00	1,41	1,62	1,80
	1,50	0,30	0,30	1,50	1,17	1,44	1,65
				3,00	1,47	1,74	1,95
				4,50	1,65	1,92	2,16
				6,00	1,74	2,01	2,28
	3,00	0,39	0,39	1,50	1,26	1,53	1,77
				3,00	1,62	1,92	2,19
				4,50	1,86	2,16	2,46
				6,00	2,04	2,34	2,64
	6,00	0,48	0,48	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,01	2,31
				4,50	1,98	2,34	2,67
				6,00	2,22	2,58	2,91
	9,00	0,51	0,57	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	12,00	0,57	0,69	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	18,00	0,66	0,93	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03
	24,00	0,72	1,08	1,50	1,26	1,56	1,83
				3,00	1,68	2,04	2,34
				4,50	2,04	2,40	2,73
				6,00	2,28	2,70	3,03

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
b=a	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
00	0,00	0,30	0,33	1.50	0,96	1,20	1,44
				3,00	1,17	1,41	1,65
				4,50	1,29	1,56	1,77
				6,00	1,41	1,65	1,86
	0,60	0,36	0,39	1,50	1,44	1,77	2,10
				3,00	1,74	2,07	2,40
				4,50	1,92	2,28	2,61
				6,00	2,07	2,43	2,73
	1,50	0,45	0,45	1,50	1,77	2,19	2,58
				3,00	2,13	2,58	2,94
				4,50	2,37	2,82	3,21
				6,00	2,58	3,00	3,42
	3,00	0,54	0,54	1,50	1,98	2,46	2,88
				3,00	2,43	2,94	3,39
				4,50	2,76	3,27	3,72
				6,00	3,00	3,54	3,99
	6,00	0,69	0,72	1,50	2,07	2,61	3,06
				3,00	2,58	3,15	3,66
				4,50	2,97	3,57	4,11
				6,00	3,30	3,90	4,47
	9,00	0,84	0,90	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,59
	12,00	0,93	1,02	1.50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4.50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62
	18,00	1,08	1,20	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62
	24,00	1,17	1,35	1,50	2,07	2,61	3,09
				3,00	2,58	3,18	3,69
				4,50	3,03	3,63	4,20
				6,00	3,39	4,02	4,62

Rayon de l'intrados flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.
4,50	0,00	0,36	0,45	1,50	1,14	1,53	1,86
				3,00	1,44	1,80	2,13
				4,50	1,62	2.01	2,34
				6,00	1,80	2,16	2,49
	0,60	0,48	0,51	1,50	1,83	2,34	2,76
				3,00	2,16	2,64	3,09
				4,50	2,40	2,88	3,33
				6,00	2,58	3,09	3.51
	1,50	0,54	0,57	1,50	2,22	2.82	3,33
				3,00	2.64	3,21	3,75
				4,50	2,94	3,54	4,05
				6,00	3,18	3,78	4,29
	3,00	0,72	0,72	1.50	2,55	3,21	3,81
				3,00	3,03	3,69	4,32
				4,50	3,39	4,08	4,71
				6,00	3,69	4,38	5,01
	6,00	0,93	0,93	1,50	2,73	3,45	4,11
				3,00	3 27	4,02	4,74
				4,50	3,72	4,50	5,22
				6,00	4,08	4,89	5,61
	9,00	1,08	1,11	1,50	2,79	3,54	4,26
				3,00	3,36	4,17	4,89
				4,50	3,84	4,68	5,46
				6,00	4,26	5,13	5,91
	12,00	1,20	1,20	1,50	2,79	3.57	4,29
				3,00	3,39	4,23	4,98
				4,50	3,90	4,77	5,55
				6,00	4,32	5,25	6,06
	18,00	1,32	1,41	1,50	2,79	3,57	4,29
				3,00	3,39	4,23	5,01
				4,50	3,93	4,83	5,64
				6,00	4,38	5,34	6,18
	24,00	1,41	2,01	1,50	2,79	3,57	4.29
				3,00	3.39	4,23	5,01
				4,50	3,93	4,83	5.64
				6,00	4,38	5,34	6,18

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
=a	h	c	d	f	e	e	e
	m.	m.	m	m	m	m.	m
00	0,00	0,45	0,54	1,50	1,53	2,04	2,46
				3.00	1,83	2,34	2,76
				4,50	2,07	2,55	3,00
				6,00	2,25	2,73	3,18
	0,60	0,57	0,60	1,50	2,13	2,76	3 30
				3,00	2.49	3,12	3.66
				4,50	2,76	3,39	3,96
				6,00	3,00	3,63	4,17
	1,50	0,69	0,72	1,50	2,61	3,33	3.99
				3,00	3,03	3,75	4,41
				4,50	3,36	4,08	4 74
				6,00	3,63	4,38	5,04
	3,00	0.90	0,90	1,50	3.03	3,87	4,62
				3,00	3,51	4,35	5,13
				4.50	3,90	4.77	5.55
				6,00	4,23	5,10	5,88
	6.00	1,14	1,14	1,50	3.36	4,29	5,13
				3,00	3,93	4,89	5,76
				4,50	4.38	5,37	6,27
				6,00	4,80	5,79	6,69
	9,00	1,26	1,26	1,50	3,51	4,50	5,37
				3,00	4,11	5,13	6,06
				4,50	4 62	5,67	6 64
				6,00	5,07	6,15	7,11
	12,00	1,35	1,35	1,50	3,57	4,59	5,52
				3 00	4.20	5,28	6 24
				4,50	4.74	5,85	6.84
				6 00	5,25	6,36	7.38
	18,00	1,47	1,98	1.50	3,57	4,59	5,52
				3,00	4,20	5,28	6.24
				4,50	4,74	5 88	6,91
				6,00	5,25	6,42	7,50
	24,00	1,53	2,82	1.50	3,57	4.59	5,52
				3,00	4 20	5,28	6,24
				4,50	4 74	5,88	6.90
				6,00	5,25	6,42	7,50

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.
7,50	0,00	0,54	0,69	1,50	1,80	2,40	2,94
				3,00	2,10	2,73	3,27
				4,50	2,37	3,00	3,54
				6,00	2,58	3,21	3,75
	0,60	0,66	0,78	1,50	2,46	3,21	3,87
				3,00	2,82	3,57	4,23
				4,50	3,12	3,87	4,53
				6,00	3,36	4,11	4,80
	1,50	0,84	0,90	1,50	3,00	3,87	4,65
				3,00	3,45	4,32	5,10
				4,50	3,78	4,68	5,46
				6,00	4,08	4,98	5,70
	3,00	1,05	1,05	1,50	3,51	4,53	5,40
				3,00	4,02	5,04	5,91
				4,50	4,41	5,43	6,36
				6,00	4,77	5,79	6,72
	6,00	1,26	1,26	1,50	3,96	5,07	6,09
				3,00	4,53	5,67	6,69
				4,50	5,01	6,18	7,23
				6,00	5,43	6,63	7,71
	9,00	1,38	1,38	1,50	4,20	5,40	6,45
				3,00	4,83	6,06	7,14
				4,50	5,34	6,63	7,74
				6,00	5,82	7,11	8,28
	12,00	1,47	1,74	1,50	4,29	5,52	6,63
				3,00	4,95	6,21	7,38
				4,50	5,52	6,84	8,01
				6,00	6,03	7,38	8,58
	18,00	1,56	2,61	1,50	4,32	5,58	6,72
				3,00	4,98	6,33	7,53
				4,50	5,61	6,99	8,22
				6,00	6,15	7,59	8,85
	24,00	1,62	3,69	1,50	4,32	5,58	6,72
				3,00	4,98	6,33	7,53
				4,50	5,61	6,99	8,22
				6,00	6,15	7,59	8,85

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés
$=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
9,00	0,00	0,63	0,84	1,50	2,07	2,82	3,48
				3 00	2,40	3,15	3,81
				4,50	2,70	3,45	4,11
				6,00	2,94	3,69	4,32
	0,60	0,78	0,93	1,50	2,73	3,63	4,38
				3,00	3,12	3,99	4,77
				4,50	3,45	4,32	5,10
				6,00	3,72	4,59	5,37
	1,50	0,96	1,05	1,50	3,39	4,38	5,28
				3,00	3,81	4,83	5,73
				4,50	4,17	5,19	6,12
				6,00	4,50	5,52	6,42
	3,00	1,17	1,17	1.50	3,93	5,10	6,12
				3,00	4,44	5,61	6,63
				4,50	4,86	6,03	7,08
				6,00	5,22	6,42	7,47
	6,00	1,35	1,35	1,50	4,56	5,85	7,02
				3,00	5,13	6,45	7,65
				4.50	5,64	6,99	8,19
				6,00	6,06	7,44	8,67
	9,00	1,47	1,71	1,50	4,83	6,24	7,47
				3,00	5,46	6,90	8,16
				4,50	6,03	7,47	8,79
				6,00	6,54	7,98	9,33
	12,00	1,53	2,19	1,50	4,98	6,42	7,71
				3,00	5,64	7,11	8,46
				4,50	6.21	7,74	9,12
				6,00	6,75	8,31	9,69
	18,00	1,62	3,30	1,50	5,04	6,54	7,86
				3,00	5,73	7,26	8,67
				4,50	6,36	7,95	9,39
				6,00	6,93	8,55	10,05
	24,00	1,83	4,71	1,50	5,04	6,54	7.86
				3,00	5,73	7,26	8,67
				4,50	6,36	7,95	9,39
				6,00	6,93	8,55	10,05

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rail sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rail sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
10,50	0,00	0,75	1,02	1,50	2,37	3,24	4,02
				3,00	2,73	3,60	4,38
				4,50	3,03	3,90	4,68
				6,00	3,30	4,17	4,95
	0,60	0,93	1,08	1,50	3,06	4,05	4,95
				3,00	3,45	4,47	5,37
				4,50	3,78	4,80	5,70
				6,00	4,08	5,10	6,00
	1,50	1,08	1,17	1,50	3,72	4,86	5,88
				3,00	4,17	5,31	6,33
				4,50	4,53	5,70	6,72
				6,00	4,86	6,03	7,05
	3,00	1,26	1,29	1,50	4,38	5,67	6,81
				3,00	4,89	6,18	7,45
				4,50	5,31	6,63	7,80
				6,00	5,64	7,02	8,19
	6,00	1,44	1,59	1,50	5,10	6,57	7,86
				3,00	5,67	7,17	8,49
				4,50	6,18	7,64	9,03
				6,00	6,63	8,16	9,54
	9,00	1,53	1,71	1,50	5,43	7,02	8,43
				3,00	6,06	7,68	9,12
				4,50	6,63	8,25	9,72
				6,00	7,14	8,79	10,29
	12,00	1,59	2,70	1,50	5,64	7,29	8,76
				3,00	6,30	7,98	9,51
				4,50	6,90	8,61	10,17
				6,00	7,44	9,18	10,77
	18,00	1,83	4,11	1,50	5,64	7,32	8,82
				3,00	6,30	8,07	9,63
				4,50	6,93	8,7	10,35
				6,00	7,53	9,36	11,01
	24,00	2,16	5,82	1,50	5,82	7,32	8,82
				3,00	6,30	8,07	9,63
				4,50	6,93	8,73	10,35
				6,00	7,53	9,36	11,01

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
b=a	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m	m.	m	m.	m
,00	0,00	0.87	1,14	1,50	2,67	3,69	4,56
				3,00	3,00	4,05	4,86
				4,50	3,36	4,38	5,25
				6,00	3,63	4,65	5,52
	0,60	1,02	1,23	1,50	3,36	4,50	5,49
				3,00	3,78	4.89	5,91
				4,50	4,11	5,25	6,27
				6,00	4,41	5,55	6,57
	1,50	1,17	1,26	1,50	4,05	5,34	6,45
				3,00	4,50	5,79	6,93
				4,50	4,89	6,18	7,32
				6,00	5,22	6,51	7,65
	3.00	1,35	1,38	1,50	4,80	6,21	7,50
				3,00	5,28	6,72	8,04
				4,50	5,73	7,17	8,49
				6,00	6,12	7,59	8,88
	6.00	1 50	1,95	1,50	5,58	7,23	8,70
				3,00	6,18	7,83	9,30
				4,50	6,69	8,37	9,87
				6,00	7,14	8,85	10,35
	9,00	1,59	2,58	1,50	6,03	7,74	9,33
				3,00	6,63	8,43	10,02
				4,50	7,20	9,03	10,65
				6,00	7,71	9,57	11,22
	12,00	1,65	3,30	1,50	6,24	8,07	9,72
				3.00	6,90	8,79	10,47
				4,50	7,50	9,42	11,13
				6,00	8,07	10,02	11,73
	18.00	2,13	4,98	1,50	6,24	8,10	9,84
				3,00	6,90	8,79	10,47
				4,50	7.50	9,42	11,19
				6,00	8,07	10,02	11.85
	24,00	2,46	7,08	1,50	7,08	8,10	9,84
				3,00	7,08	8,79	10,47
				4,50	7,50	9,42	11,19
				6,00	8,07	10.02	11,85

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
13,50	0 00	0,99	1,23	1,50	3.03	4,14	5,13
				3,00	3,39	4,50	5,49
				4.50	3,72	4,86	5.85
				6,00	4,02	5,25	6,12
	0,60	1,14	1,29	1,50	3,63	4 89	6,00
				3,00	4,05	5,31	6,42
				4,50	4,41	5.67	6,78
				6,00	4,74	6,00	7,11
	1,50	1,26	1,35	1,50	4,38	5,79	7,02
				3,00	4,83	6.24	7,50
				4.50	5,22	6,63	7,89
				6,00	5,58	6,99	8,25
	3,00	1,41	1,65	1,50	5,16	6,75	8,10
				3,00	5,67	7,26	8,67
				4,50	6,12	7,71	9,15
				6,00	6,51	8,13	9,54
	6,00	1,56	2,34	1,50	6,06	7,86	9,45
				3,00	6,63	8,43	10,05
				4,50	7,14	9,00	10,62
				6,00	7,62	9,48	11,13
	9,00	1,62	3,09	1,50	6,57	8,49	10,23
				3,00	7,17	9,15	10,89
				4,50	7.77	9,75	11,52
				6,00	8,28	10,29	12,09
	12,00	1,86	3,96	1,50	6.69	8.70	10,53
				3,00	7.35	9,42	11,25
				4.50	7,95	10.05	11,91
				6,00	8,52	10,62	12,51
	18,00	2,40	5,97	1,50	6,69	8,70	10,53
				3,00	7,35	9,42	11,25
				4,50	7.95	10,05	11,94
				6,00	8,52	10,62	12,60
	24,00	2,76	8,49	1,50	8,49	8,70	10,53
				3.00	8,49	9,42	11,25
				4,50	8,49	10,05	11,94
				6,00	8,52	10.62	12,60

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
=a	h	c	d	f	e	e	e
	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0	0,00	1,08	1,32	1,50	3,21	4,47	5,58
				3 00	3,60	4,86	5,97
				4,50	3,96	5,19	6,30
				6,00	4,26	5,52	6,60
	0,60	1,23	1,41	1,50	3,93	5,31	6,54
				3,00	4,35	5,73	6,96
				4,50	4,71	6,09	7,32
				6,00	5,04	6,42	7,65
	1,50	1,32	1,62	1,50	4,59	6,21	7,56
				3,00	5,10	6,66	8,01
				4,50	5,55	7,08	8,43
				6,00	5,88	7,41	8,79
	3,00	1,44	2,01	1,50	5,37	7,02	8,52
				3,00	6,03	7,74	9,27
				4,50	6,48	8,19	9,75
				6,00	6,87	8,61	10,17
	6,00	1,59	2,79	1,50	6,51	8,46	10,11
				3.00	7,08	9,06	10.80
				4,50	7,59	9,57	11,37
				6,00	8,07	10,08	11,85
	9,00	1,74	3 66	1,50	7,02	9,12	11,01
				3,00	7,65	9,78	11,67
				4,50	8,22	10.38	12,30
				6,00	8,73	10,92	12,87
	12,00	2,10	4,71	1.50	7,17	9,36	11,31
				3,00	7.80	10,02	12,03
				4,50	8,40	10 65	12,69
				6,00	8,97	11,25	13,29
	18,00	2,67	7,08	1,50	7.17	9,36	11,31
				3,00	7,80	10,02	12,03
				4,50	8.40	10,65	12,69
				6,00	8,97	11,25	13,29
	24,00	3.03	9.99	1,50	9,99	9,99	11,31
				3.00	9,99	10,02	12,03
				4,50	9,99	10.65	12,69
				6,00	9,99	11,25	13,29

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
16,50	0,00	1,17	1,50	1,50	3,48	4,86	6,06
				3,00	3,87	5,25	6,45
				4,50	4,23	5,61	6,81
				6,00	4,53	5,91	7,11
	0,60	1,29	1,71	1,50	4,20	5,70	7,02
				3,00	4,62	6,12	7,44
				4,50	4,98	6,48	7,83
				6,00	5,31	6,84	8,16
	1,50	1,38	1,95	1,50	4,95	6,60	8,07
				3,00	5,40	7,05	8,52
				4,50	5,82	7,47	8,94
				6,00	6,18	7,83	9,33
	3,00	1,50	2,37	1,50	5,85	7,68	9,33
				3,00	6,36	8,19	9,84
				4,50	6,78	8,67	10,32
				6,00	7,20	9,06	10,74
	6,00	1,62	3,27	1,50	6,93	9,03	10,92
				3,00	7,50	9,63	11,52
				4,50	8,04	10,17	12,06
				6,00	8,49	10,65	12,57
	9,00	1,95	4,32	1,50	7,44	9,69	11,70
				3,00	8,07	10,35	12,39
				4,50	8,61	10,92	13,17
				6,00	9,15	11,52	13,56
	12,00	2,34	5,52	1,50	7,56	9,93	12,03
				3,00	8,22	10,59	12,72
				4,50	8,79	11,22	13,38
				6,00	9,36	11,79	13,98
	18,00	2,94	8,31	1,50	8,31	9,93	12,03
				3,00	8,31	10,59	12,72
				4,50	8,79	11,22	13,38
				6,00	9,36	11,79	13,98
	24,00	3,30	11,70	1,50	11,70	11,70	12,03
				3,00	11,70	11,70	12,72
				4,50	11,70	11,70	13,38
				6,00	11,70	11,79	13,98

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2.5 pour les ponts-route sous des remblais peu elevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
=a	h	c	d	f	e	e	e
a.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
00	0,00	1,26	1,83	1,50	3,72	5,22	6,51
				3,00	4,11	5,61	6,93
				4,50	4,47	5,97	7,29
				6,00	4,80	6,30	7,59
	0,60	1,35	2,04	1,50	4,44	6,03	7,47
				3,00	4,86	6,45	7,89
				4,50	5,22	6,84	8,28
				6,00	5,58	7,20	8,61
	1,50	1,44	2,34	1,50	5,22	6,99	8,58
				3,00	5,67	7,44	9,03
				4,50	6,09	7,86	9,45
				6,00	6,45	8,25	9,84
	3,00	1,53	2,79	1,50	6,18	8,16	9,15
				3,00	6,66	8,64	10,38
				4,50	7,11	9,09	10,86
				6,00	7,53	9,51	11,28
	6,00	1,68	3,81	1,50	7,32	9,57	11,55
				3,00	7,89	10,14	12,15
				4,50	8,40	10,68	12,72
				6,00	8,88	11,16	13,20
	9,00	2,16	5,07	1,50	7,80	10.23	12,36
				3,00	8,40	10.86	13,02
				4,50	8,97	11,43	13,65
				6,00	9,51	11,97	14,19
	12,00	2,58	6,45	1,50	7,95	10,44	12,69
				3,00	8,58	11,10	13,38
				4,50	9,15	11,70	14,07
				6,00	9,72	12,30	14,64
	18,00	3,21	9,63	1,50	9,63	10,44	12.69
				3,00	9,63	11,10	13,38
				4.50	9,63	11,73	14,07
				6,00	9,72	12,30	14,64
	24,00	3,54	13,56	1,50	13,56	13,56	13,56
				3,00	13,56	13,56	13,56
				4,50	13,56	13.56	14,07
				6,00	13,56	13,56	14,64

Rayon de l'intrados, flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
19,50	0,00	1,32	2,22	1,50	3,96	5,55	6,96
				3,00	4,35	5,94	7,35
				4,50	4,71	6,39	7,74
				6,00	5,04	6,63	8,07
	0,60	1,41	2,40	1,50	4,71	6,42	7,95
				3,00	5,13	6,84	8,37
				4,50	5,49	7,23	8,76
				6,00	5,85	7,59	9,12
	1,50	1,47	2,73	1,50	5,46	7,35	9,03
				3,00	6,00	7,92	9,63
				4,50	6,33	8,22	9,90
				6,00	6,72	8,61	10,29
	3,00	1,56	3,27	1,50	6,45	8,55	10,41
				3,00	6,96	9,06	10,92
				4,50	7,41	9,51	11,40
				6,00	7,83	9,93	11,82
	6,00	1,86	4,47	1,50	7,65	10,05	12,15
				3,00	8,22	10,62	12,75
				4,50	8,73	11,16	13,32
				6,00	9,21	11,64	13,80
	9,00	2,40	5,91	1,50	8,16	10,71	12,99
				3,00	8,76	11,34	13,65
				4,50	9,30	11,91	14,25
				6,00	9,81	12,45	14,79
	12,00	2,82	7,44	1,50	8,28	10,95	13,32
				3,00	8,91	11,61	14,01
				4,50	9,51	12,21	14,64
				6,00	10,02	12,78	15,24
	18,00	3,48	11,13	1,50	11,13	11,13	13,32
				3,00	11,13	11,61	14,01
				4,50	11,13	12,21	14,64
				6,00	11,13	12,78	15,24
	24,00	3,78	15,60	1,50	15,60	15,60	15,60
				3,00	15,60	15,60	15,60
				4,50	15,60	15,60	15,60
				6,00	15,60	15,60	15,60

demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
)=a	h	c	d	f	e	e	e
.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.
,00	0,00	1,38	2,64	1,50	4,17	5,85	7,38
				3,00	4,56	6,27	7,77
				4,50	4,92	6,63	8,13
				6,00	5,25	6,96	8,49
	0,60	1,44	2,82	1,50	4,86	6,72	8,34
				3,00	5,28	7,14	8,76
				4,50	5,67	7,53	9,15
				6,00	6,03	7,89	9,51
	1,50	1,50	3,18	1,50	5,70	7,71	9,48
				3,00	6,15	8,16	9,93
				4,50	6,57	8,58	10,38
				6,00	6,96	8,97	10,77
	3,00	1,59	3,78	1,50	6,72	8,94	10,92
				3,00	7,23	9,45	11,43
				4,50	7,65	9,90	11,91
				6,00	8,10	10,35	12,33
	6,00	2,04	5,19	1,50	7,98	10,50	12,75
				3,00	8,52	11,07	13,35
				4,50	9,03	11,61	13,89
				6,00	9,51	12,09	14,37
	9,00	2,61	6,81	1,50	8,46	11,16	13,59
				3,00	9,06	11,79	14,22
				4,50	9,60	12,36	14,82
				6,00	10,14	12,90	16,41
	12,00	3,06	8,58	1,50	8,58	11,34	13,86
				3,00	9,18	12,03	14,55
				4,50	9,75	12,63	15,18
				6,00	10,29	13,20	15,78
	18,00	3,72	12,75	1,50	12,75	12,75	13,86
				3,00	12,75	12,75	14,55
				4,50	12,75	12,75	15,18
				6,00	12,75	13,20	15,78
	24,00	3,96	17,88	1,50	17,88	17,88	17,88
				3,00	17,88	17,88	17,88
				4,50	17,88	17,88	17,88
				6,00	17,88	17,88	17,88

Rayon de l'intrados flèche, demi-ouverture.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	HAUTEUR de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais elevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$r=b=a$	h	c	d	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.
22,50	0,00	1,44	3,03	1,50	4,41	6,21	7,83
				3,00	4,80	6,63	8,25
				4,50	5,19	6,99	8,61
				6,00	5,52	7,35	8,97
	0,60	1,50	3,27	1,50	5,04	6,99	8,73
				3,00	5,46	7,41	9,15
				4,50	5,85	7,80	9,54
				6,00	6,21	8,19	9,93
	1,50	1,56	3,69	1,50	5,94	8,07	9,93
				3,00	6,39	8,52	10,41
				4,50	6,81	8,94	10,83
				6,00	7,20	9,33	11,22
	3,00	1,65	4,32	1,50	6,99	9,33	11,43
				3,00	7,50	9,84	11,91
				4,50	7,95	10,29	12,39
				6,00	8,37	10,74	12,84
	6,00	2,25	5,97	1,50	8,25	10,92	13,29
				3,00	8,82	11,46	13,86
				4,50	9,33	12,00	14,40
				6,00	9,81	12,51	14,91
	9,00	2,82	7,80	1,50	8,76	11,61	14,13
				3,00	9,33	12,24	14,70
				4,50	9,87	12,78	15,36
				6,00	10,41	13,29	15,90
	12,00	3,30	9,84	1,50	9,84	11,73	14,37
				3,00	9,84	12,39	15,06
				4,50	9,96	12,99	15,66
				6,00	10,50	13,56	16,26
	18,00	3,96	14,55	1,50	14,55	14,55	14,55
				3,00	14,55	14,55	15,06
				4,50	14,55	14,55	15,66
				6,00	14,55	15,55	16,26
	24,00	4,11	20,34	1,50	20,34	20,34	20,34
				3,00	20,34	20,34	20,34
				4,50	20,34	20,34	20,34
				6,00	20,34	20,34	20,34

TABLE II.

VOUTES EN ARC DE CERCLE SURBAISSÉ AU QUART.

Pour ces voûtes, le rapport de la flèche à l'ouverture, $\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$.

L'inclinaison des naissances sur la verticale, $\beta=53^\circ+7'+48''$.

La projection horizontale du joint de naissance, $\delta=\frac{ad}{r}=0{,}8\times d$.

Ouverture.	Flèche	Hauteur de la charge sur la clef.	EPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	EPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	EPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
1,20	0,30	0,00	0,30	0,30	0,24	1,50	0,60	0,60	0,60
						3,00	0,60	0,60	0,60
						4,50	0,60	0,60	0,60
						6,00	0,60	0,60	0,60
		0,60	0,30	0,30	0,24	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,93	1,05	1,17
						4,50	0,99	1,11	1,23
						6,00	1,02	1,14	1,26
		1,50	0,30	0,30	0,24	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,17	1,35	1,50
						6,00	1,26	1,41	1,56
		3,00	0,30	0,30	0,24	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,20	1,38	1,53
						6,00	1,32	1,50	1,65
		6,00	0,33	0,36	0,28	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,23	1,44	1,59
						6,00	1,38	1,59	1,77
		9,00	0,36	0,42	0,34	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,23	1,44	1,59
						6,00	1,38	1,59	1,77
		12,00	0,39	0,45	0,36	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,23	1,44	1,59
						6,00	1,38	1,59	1,77
		18,00	0,42	0,57	0,46	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,23	1,44	1,59
						6,00	1,38	1,59	1,77
		24,00	0,42	0,66	0,53	1,50	0,84	0,96	1,11
						3,00	1,05	1,20	1,35
						4,50	1,23	1,44	1,59
						6,00	1,38	1,59	1,77

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.
1,50	2,40	6,60	0,00	0,30	0,30	0,24	1,50	0,63	0,72	0,81
							3,00	0,72	0,81	0,90
							4,50	0,75	6,84	0,93
							6,00	0,75	0,87	0,96
			0,60	0,30	0,30	0,24	1,50	1,05	1,26	1,41
							3,00	1,29	1,47	1,68
							4,50	1,41	1,62	1,80
							6,00	1,47	1,68	1,83
			1,50	0,30	0,30	0,24	1,50	1,17	1,41	1,62
							3,00	1,53	1,77	2,01
							4,50	1,71	1,98	2,19
							6,00	1,83	2,10	2,34
			3,00	0,39	0,39	0,31	1,50	1,20	1,47	1,68
							3,00	1,62	1,89	2,16
							4,50	1,89	2,19	2,46
							6,00	2,07	2,37	2,67
			6,00	0,48	0,48	0,38	1,50	1,20	1,47	1,68
							3,00	1,65	1,95	2,22
							4,50	1,98	2,31	2,61
							6,00	2,22	2,58	2,91
			9,00	0,51	0,54	0,43	1,50	1,20	1,47	1,68
							3,00	1,68	1,98	2,25
							4,50	2,04	2,37	2,70
							6,00	2,31	2,70	3,03
			12,00	0,57	0,63	0,50	1,50	1,20	1,47	1,6
							3,00	1,68	1,98	2,2
							4,50	2,04	2,37	2,7
							6,00	2,31	2,70	3,
			18,00	0,66	0,81	0,65	1,50	1,20	1,47	1
							3,00	1,68	1,98	2
							4,50	2,04	2,37	2
							6,00	2,31	2,70	3
			24,00	0,72	0,93	0,74	1,50	1,20	1,47	
							3,00	1,68	1,98	
							4,50	2,04	2,37	
							6,00	2,31	2,70	

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	4,80	1,20	0,00	0,30	0,30	0,24	1,50	1,17	1,41	1,62
							3,00	1,41	1,65	1.86
							4,50	1,50	1,74	1,95
							6.00	1,59	1,83	2,04
			0,60	0,36	0,39	0,31	1,50	1,53	1,86	2,19
							3,00	1,89	2,25	2,55
							4,50	2,13	2,46	2,76
							6,00	2,25	2,58	2,91
			1,50	0,45	0,45	0,36	1,50	1,74	2,13	2,46
							3,00	2,22	2,64	2,85
							4,50	2,52	2,94	3,33
							6,00	2,73	3,15	3,54
			3,00	0,54	0,54	0,43	1,50	1,83	2,25	2,64
							3,00	2,43	2,88	3,30
							4,50	2.82	3,30	3,75
							6,00	3,12	3,60	4,08
			6,00	0,69	0,72	0,58	1,50	1,83	2,28	2,70
							3,00	2,49	3,00	3,48
							4,50	2,97	3,54	4,02
							6,00	3,36	3,96	4,44
			9,00	0,84	0,87	0,70	1,50	1,83	2,28	2,70
							3,00	2,49	3,00	3,48
							4,50	2,97	3,54	4,02
							6,00	3,36	3,96	4,50
			12,00	0,93	0,99	0,79	1,50	1,83	2,28	2,70
							3,00	2,49	3,00	3,48
							4,50	2,97	3,54	4,02
							6,00	3,36	3,96	4,50
			18,00	1,08	1,14	0,91	1,50	1,83	2,28	2,70
							3,00	2,49	3,00	3,48
							4,50	2,97	3,54	4,02
							6,00	3,36	3,96	4,50
			24,00	1,17	1,29	1,03	1,50	1,83	2,28	2,70
							3.00	2,49	3,00	3,48
							4,50	2,97	3,54	4,02
							6,00	3,36	3,96	4,50

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m	m
4,50	7,20	1,80	0,00	0,36	0,42	0,34	1,50	1,56	1,92	2,22
							3,00	1,86	2,22	2,55
							4,50	2,07	2,40	2,73
							6,00	2,19	2,52	2,85
			0,60	0,48	0,51	0,41	1,50	1,92	2,37	2,79
							3,00	2,37	2,85	3,27
							4,50	2,67	3,12	3,54
							6,00	2,85	3,33	3,75
			1,50	0,54	0,57	0,46	1,50	2,16	2,70	3,18
							3,00	2,76	3,30	3,81
							4,50	3,15	3,72	4,23
							6,00	3,42	3,99	4,50
			3,00	0,72	0,72	0,58	1,50	2,28	2,88	3,42
							3,00	2,97	3,60	4,17
							4,50	3,48	4,11	4,71
							6,00	3,84	4,50	5,10
			6,00	0,93	0,93	0,74	1,50	2,34	2,97	3,54
							3,00	3,09	3,81	4,41
							4,50	3,69	4,41	5,07
							6,00	4,14	4,89	5,58
			9,00	1,08	1,11	0,89	1,50	2,34	2,97	3,54
							3,00	3,09	3,81	4,44
							4,50	3,69	4,47	5,16
							6,00	4,20	5,01	5,73
			12,00	1,20	1,20	0,96	1,50	2,34	2,97	3,54
							3,00	3,09	3,81	4,44
							4,50	3,69	4,47	5,19
							6,00	4,23	5,07	5,79
			18,00	1,32	1,38	1,10	1,50	2,34	2,97	3,54
							3,00	3,09	3,81	4,44
							4,50	3,69	4,47	5,19
							6,00	4,23	5,07	5,85
			24,00	1,41	1,77	1,42	1,50	2,34	2,97	3,54
							3,00	3,09	3,81	4,44
							4,50	3,69	4,47	5,19
							6,00	4,23	5,07	5,85

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu eleves et pour les ponts-rails sous des remblais élevés	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	9,60	2,40	0,00	0,45	0,51	0,41	1,50	1,92	2,40	2,82
							3,00	2,31	2,79	3,21
							4,50	2,55	3,03	3,45
							6,00	2,73	3,21	3,60
			0,60	0,57	0,60	0,48	1,50	2,31	2,88	3,42
							3,00	2,82	3,42	3,96
							4,50	3,18	3,78	4,29
							6,00	3,42	4,02	4,56
			1,50	0,69	0,72	0,58	1,50	2,55	3,24	3,84
							3,00	3,21	3,90	4,53
							4,50	3,66	4,35	4,98
							6,00	3,99	4,74	5,34
			3,00	0,90	0,90	0,72	1,50	2,70	3,45	4,14
							3,00	3,45	4,23	4,95
							4,50	4,02	4,83	5,55
							6,00	4,44	5,25	6,00
			6,00	1,14	1,14	0,91	1,50	2,82	3,60	4,35
							3,00	3,63	4,50	5,28
							4,50	4,29	5,19	6,00
							6,00	4,80	5,76	6,60
			9,00	1,26	1,26	1,01	1,50	2,82	3,66	4,41
							3,00	3,69	4,59	5,40
							4,50	4,38	5,34	6,18
							6,00	4,95	5,94	6,84
			12,00	1,35	1,35	1,08	1,50	2,82	3,66	4,44
							3,00	3,69	4,62	5,46
							4,50	4,44	5,40	6,30
							6,00	5,04	6,06	6,99
			18,00	1,47	1,77	1,42	1,50	2,82	3,66	4,44
							3,00	3,69	4,62	5,46
							4,50	4,44	5,40	6,30
							6,00	5,04	6,06	6,99
			24,00	1,53	2,28	1,82	1,50	2,82	3,66	4,44
							3,00	3,69	4,62	5,46
							4,50	4,44	5,40	6,30
							6,00	5,04	6,06	6,99

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m	m.	m.	m.	m.	m	m	m.	m.	m.
7,50	12,00	3,00	0,00	0,54	0,63	0,50	1,50	2,25	2,82	3,36
							3,00	2,70	3,30	3,81
							4,50	3,00	3,60	4,11
							6,00	3,24	3,81	4,32
			0,60	0,66	0,72	0,58	1,50	2,64	3,33	3,99
							3,00	3,21	3,93	4,56
							4,50	3,63	4,32	4,98
							6,00	3,93	4,62	5,28
			1,50	0,84	0,87	0,70	1,50	2,91	3,72	4,44
							3,00	3,60	4,44	5,19
							4,50	4,11	4,95	5,70
							6,00	4,50	5,34	6,09
			3,00	1,05	1,05	0,84	1,50	3,12	4,02	4,80
							3,00	3,90	4,83	5,67
							4,50	4,50	5,46	6,33
							6,00	4,98	5,94	6,81
			6,00	1,26	1,26	1,01	1,50	3,27	4,23	5,10
							3,00	4,14	5,19	5,85
							4,50	4,86	5,91	6,90
							6,00	5,43	6,54	7,53
			9,00	1,38	1,38	1,10	1,50	3,33	4,32	5,22
							3,00	4,26	5,34	6,30
							4,50	5,01	6,15	7,17
							6,00	5,64	6,84	7,89
			12,00	1,47	1,62	1,30	1,50	3,33	4,32	5,25
							3,00	4,26	5,34	6,36
							4,50	5,04	6,21	7,26
							6,00	5,73	6,93	8,04
			18,00	1,56	2,19	1,75	1,50	3,33	4,32	5,25
							3,00	4,26	5,34	6,36
							4,50	5,04	6,21	7,26
							6,00	5,73	6,93	8,04
			24,00	1,62	2,85	2,28	1,50	3,33	4,32	5,25
							3,00	4,26	5,34	6,36
							4,50	5,04	6,21	7,26
							6,00	5,73	6,93	8,04

Rayon du cintrage.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	14,40	3,60	0,00	0,63	0,75	0,60	1,50	2,55	3,27	3,90
							3,00	3,09	3,66	4,41
							4,50	3,45	4,14	4,74
							6,00	3,69	4,38	5,01
			0,60	0,78	0,87	0,70	1,50	2,94	3,78	4,53
							3,00	3,57	4,41	5,16
							4,50	4,02	4,86	5,61
							6,00	4,38	5,22	5,94
			1,50	0,96	1,02	0,82	1,50	3,27	4,20	5,04
							3,00	3,99	4,95	5,79
							4,50	4,53	5,49	6,36
							6,00	4,95	5,94	6,81
			3,00	1,17	1,17	0,94	1,50	3,51	4,56	5,58
							3,00	4,32	5,43	6,36
							4,50	4,98	6,06	7,05
							6,00	5,49	6,60	7,59
			6,00	1,35	1,35	1,08	1,50	3,72	4,86	5,88
							3,00	4,65	5,82	6,90
							4,50	5,40	6,63	7,74
							6,00	6,03	7,29	8,43
			9,00	1,47	1,62	1,30	1,50	3,78	4,95	6,00
							3,00	4,74	6,00	7,11
							4,50	5,55	6,87	8,04
							6,00	6,24	7,59	8,82
			12,00	1,53	1,92	1,54	1,50	3,78	4,95	6,03
							3,00	4,77	6,03	7,20
							4,50	5,61	6,96	8,16
							6,00	6,30	7,74	9,00
			18,00	1,62	2,61	2,09	1,50	3,78	4,95	6,03
							3 00	4,77	6,03	7,20
							4,50	5,61	6,96	8,16
							6,00	6,30	7,74	9,03
			24,00	1,83	3,54	2,83	1,50	3,78	4,95	6,03
							3,00	4,77	6,03	7,20
							4,50	5,61	6,96	8,16
							6,00	6,30	7,74	9,03

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m
10,50	16,80	4,20	0,00	0,75	0,90	0,72	1,50	2,88	3,72	4,44
							3,00	3,45	4,26	4,98
							4,50	3,84	4,65	5,40
							6,00	4,17	4,98	5,70
			0,60	0,93	1,02	0,82	1,50	3,27	4,23	5,07
							3,00	3,93	4,89	5,76
							4,50	4,41	5,40	6,24
							6,00	4,83	5,79	6,63
			1,50	1,08	1,14	0,91	1,50	3,60	4,68	5,64
							3,00	4,35	5,46	6,42
							4,50	4,95	6,03	7,02
							6,00	5,40	6,51	7,50
			3,00	1,26	1,29	1,03	1,50	3,87	5,07	6,12
							3,00	4,74	5,94	7,05
							4,50	5,40	6,66	7,77
							6,00	5,97	7,23	8,34
			6,00	1,44	1,53	1,22	1,50	4,14	5,43	6,57
							3,00	5,07	6,42	7,65
							4,50	5,88	7,26	8,52
							6,00	6,54	7,98	9,24
			9,00	1,53	1,89	1,51	1,50	4,20	5,52	6,72
							3,00	5,19	6,63	7,89
							4,50	6,06	7,53	8,85
							6,00	6,78	8,13	9,69
			12,00	1,59	2,25	1,80	1,50	4,20	5,55	6,78
							3,00	5,22	6,69	7,98
							4,50	6,12	7,65	9,00
							6,00	6,90	8,49	9,90
			18,00	1,83	3,18	2,54	1,50	4,20	5,55	6,78
							3,00	5,22	6,69	7,98
							4,50	6,12	7,65	9,00
							6,00	6,90	8,49	9,90
			24,00	2,16	4,32	3,46	1,50	4,20	5,55	6,78
							3,00	5,22	6,69	7,98
							4,50	6,12	7,65	9,00
							6,00	6,90	8,49	9,90

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voûte à la clef.	Épaisseur de la voûte à la culée.	Épaisseur de la voûte — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2.5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
12,00	19,20	4 80	0,00	0,87	1,02	0,82	1,50	3,21	4,17	5,01
							3,00	3,81	4,74	5.58
							4,50	4,26	5,19	6,03
							6,00	4,59	5,52	6,36
			0,60	1,02	1,14	0,91	1,50	3,60	4,68	5,64
							3,00	4,23	5,31	6,27
							4,50	4,80	5,88	6,84
							6,00	5,22	6,30	7,26
			1,50	1,17	1,23	0,98	1,50	3,90	5,10	6,18
							3,00	4,68	5,88	6,99
							4,50	5,31	6,51	7,62
							6,00	5,79	7,02	8,10
			3,00	1,35	1,38	1,10	1,50	4,26	5,58	6,75
							3,00	5,13	6,48	7,68
							4,50	5,82	7,20	8,43
							6,00	6,42	7,80	9,06
			6,00	1,50	1,77	1,42	1,50	4,50	5,94	7,23
							3,00	5,49	6,99	8,34
							4,50	6,33	7,86	9,24
							6,00	7,02	8,58	9,99
			9,00	1,59	2,16	1,73	1,50	4,59	6,09	7,44
							3,00	5,64	7,20	8.61
							4,50	6.54	8,16	9,63
							6,00	7,29	8,97	10,47
			12,00	1,65	2,61	2,09	1,50	4,59	6,12	7,47
							3,00	5.67	7,26	8,73
							4.50	6,60	8,28	9,78
							6,00	7,41	9,15	10,71
			18,00	2,13	3,84	3,05	1,50	4.59	6,12	7,47
							3,00	5,67	7,26	8,73
							4,50	6.60	8,28	9,78
							6,00	7.41	9,15	10,71
			24,00	2,46	5,19	4,15	1,50	4,59	6,12	7,47
							3,00	5,67	7,26	8,73
							4.50	6,60	8,28	9.78
							6,00	7,41	9,15	10.71

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉ EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE SÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	les s r é
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	
m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	
13,50	21,60	5,40	0,00	0,99	1,14	0,91	1,50	3,54	4,59	
							3,00	4,14	5,22	
							4,50	4,65	5,70	
							6,00	5,01	6,06	
			0,60	1,14	1,23	0,98	1,50	3,93	5,13	
							3,00	4,62	5,82	
							4,50	5,19	6,39	
							6,00	5,64	6,84	
			1,50	1,26	1,32	1,06	1,50	4,26	5,58	
							3,00	5,07	6,39	
							4,50	5,70	7,05	
							6,00	6,24	7,56	
			3,00	1,41	1,56	1,25	1,50	4,59	6,06	
							3,00	5,49	6,96	
							4,50	6,21	7,74	
							6,00	6,84	8,34	
			6,00	1,56	2,01	1,61	1,50	4,89	6,48	
							3,00	5,88	7,53	
							4,50	6,75	8,43	
							6,00	7,47	9,18	1
			9,00	1,62	2,49	1,99	1,50	4,98	6,63	
							3,00	6,03	7,77	
							4,50	6,96	8,76	1
							6,00	7,77	9,60	1
			12,00	1,86	3,09	2,47	1,50	4,98	6,63	
							3,00	6,03	7,77	
							4,50	6,96	8,76	1
							6,00	7,77	9,66	1
			18,00	2,40	4,50	3,60	1,50	4,98	6,63	
							3,00	6,03	7,77	
							4,50	6,96	8,76	1
							6,00	7,77	9,66	1
			24,00	2,76	6,15	4,92	1,50	4,98	6,63	
							3,00	6,03	7,77	
							4,50	6,96	8,76	1
							6,00	7,77	9,66	1

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
15,00	24,00	6,00	0,00	1,08	1,23	0,98	1,50	3,84	5,01	6,06
							3,00	4,47	5,67	6,72
							4,50	5,01	6,18	7,23
							6,00	5,40	6,57	7,62
			0,60	1,23	1,35	1,08	1,50	4,23	5,55	6,72
							3,00	4,95	6,27	7,44
							4,50	5,52	6,84	8,04
							6,00	6,00	7,32	8,49
			1,50	1,32	1,50	1,20	1,50	4,59	6,03	7,29
							3,00	5,37	6,84	8,13
							4,50	6,06	7,50	8,82
							6,00	6,60	8,07	9,36
			3,00	1,44	1,77	1,42	1,50	4,92	6,51	7,92
							3,00	5,82	7,44	8,88
							4,50	6,60	8,22	9,66
							6,00	7,23	8,88	10,35
			6,00	1,59	2,31	1,85	1,50	5,22	6,96	8,49
							3,00	6,27	8,04	9,63
							4,50	7,14	8,97	10,59
							6,00	7,89	9,75	11,40
			9,00	1,74	2,88	2,30	1,50	5,31	7,11	8,73
							3,00	6,39	8,28	9,96
							4,50	7,35	9,27	10,98
							6,00	8,16	10,14	11,91
			12,00	2,10	3,63	2,90	1,50	5,31	7,11	7,11
							3,00	6,39	8,28	8,28
							4,50	7,35	9,27	10,98
							6,00	8,16	10,14	11,94
			18,00	2,67	5,28	4,22	1,50	5,31	7,11	7,11
							3,00	6,39	8,28	8,28
							4,50	7,35	9,27	10,98
							6,00	8,16	10,14	11,94
			24,00	3,03	7,14	5,71	1,50	5,31	7,11	7,11
							3,00	6,39	8,28	8,28
							4,50	7,35	9,27	10,98
							6,00	8,16	10,14	11,94

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
16,50	26,40	6,60	0,00	1,17	1,35	1,08	1,50	4,14	5,43	6,60
							3,00	4,86	6,15	7,29
							4,50	5,34	6,63	7,80
							6,00	5,79	7,08	8,22
			0,60	1,29	1,54	1,23	1,50	4,50	5,94	7,20
							3,00	5,25	6,69	7,80
							4,50	5,85	7,29	8,58
							6,00	6,36	7,77	9,06
			1,50	1,38	1,71	1,37	1,50	4,86	6,42	7,80
							3,00	5,70	7,26	8,67
							4,50	6,36	7,95	9,36
							6,00	6,93	8,52	9,93
			3,00	1,50	2,01	1,61	1,50	5,25	6,93	8,46
							3,00	6,15	7,89	9,42
							4,50	6,93	8,67	10,23
							6,00	7,59	9,36	10,92
			6,00	1,62	2,58	2,06	1,50	5,58	7,44	9,12
							3,00	6,60	8,52	10,23
							4,50	7,50	9,48	11,22
							6,00	8,28	10,29	12,06
			9,00	1,95	3,36	2,69	1,50	5,61	7,56	9,30
							3,00	6,69	8,70	10,50
							4,50	7,62	9,72	11,55
							6,00	8,46	10,59	12,48
			12,00	2,34	4,23	3,38	1,50	5,61	7,56	9,30
							3,00	6,69	8,70	10,50
							4,50	7,62	9,72	11,55
							6,00	8,46	10,59	12,48
			18,00	2,94	6,12	4,90	1,50	5,61	7,56	9,30
							3,00	6,69	8,70	10,50
							4,50	7,62	9,72	11,55
							6,00	8,46	10,59	12,48
			24,00	3,30	8,25	6,60	1,50	6,60	7,56	9,30
							3,00	6,69	8,70	10,50
							4,50	7,62	9,72	11,55
							6,00	8,46	10,59	12,48

Rayon de l'intrados	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2.5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.
,00	28,80	7,20	0,00	1,26	1,59	1,27	1,50	4,41	5,82	7,08
							3,00	5,10	6,51	7,77
							4,50	5,67	7,08	8,31
							6,00	6,12	7,53	8,79
			0,60	1,35	1,77	1,42	1,50	4,77	6,30	7,68
							3,00	5,52	7,08	8,43
							4,50	6,15	7,68	9,06
							6,00	6,66	8,22	9,57
			1,50	1,44	1,98	1,58	1,50	5,13	6,81	8,31
							3,00	5,97	7,65	9,15
							4,50	6,66	8,37	9,87
							6,00	7,26	8,97	10,47
			3,00	1,53	2,28	1,82	1,50	5,52	7,35	8,97
							3,00	6,45	8,31	9,96
							4,50	7,26	9,12	10,80
							6,00	7,92	9,81	11,49
			6,00	1,68	2,94	2,35	1,50	5,88	7,89	9,66
							3,00	6,93	9,00	10,80
							4,50	7,83	9,93	11,79
							6,00	8,64	10,77	12,66
			9,00	2,16	3,87	3,10	1,50	5,88	7,98	9,84
							3,00	6,96	9,12	11,04
							4,50	7,92	10,14	12,09
							6,00	8,76	11,01	13,02
			12,00	2,58	4,86	3,89	1,50	5,88	7,98	9,84
							3,00	6,96	9,12	11,04
							4,50	7,92	10,14	12,09
							6,00	8,76	11,01	13,02
			18,00	3,21	6,99	5,59	1,50	5,88	7,98	9,84
							3,00	6,96	9,12	11,04
							4,50	7,92	10,14	12,09
							6,00	8,76	11,01	13,02
			24,00	3,54	9,45	7,56	1,50	7,56	7,98	9,84
							3,00	7,56	9,12	11,04
							4,50	7,92	10,14	12,09
							6,00	8,76	11,01	13,02

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts route sous des remblais élevés.	2.5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
19,50	31 20	7,80	0,00	1,32	1,86	1,49	1,50	4,65	6,18	7,53
							3,00	5,37	6,87	8,22
							4,50	5,94	7,47	8,79
							6,00	6,42	7,95	9,27
			0,60	1,41	1,98	1,58	1,50	5,04	6,69	8,16
							3,00	5,79	7,47	8,91
							4,50	6,45	8,10	9,57
							6,00	6,99	8,64	10,11
			1,50	1,47	2,22	1,78	1,50	5,40	7.20	8,76
							3,00	6,24	8,04	9,66
							4,50	6,96	8,76	10,38
							6,00	7,56	9,39	10,98
			3,00	1,56	2,58	2,06	1,50	5,82	7,74	9,72
							3,00	6,75	8,73	10,47
							4,50	7,56	9.54	11,31
							6,00	8,25	10,26	12,03
			6,00	1,86	3,39	2,71	1,50	6,15	8,28	10,20
							3,00	7,20	9,39	11,34
							4,50	8,13	10,35	12,33
							6,00	8,94	11,19	13,20
			9,00	2,40	4,47	3,58	1,50	6,15	8,37	10.35
							3,00	7.20	9,48	11,52
							4,50	8,16	10,50	12.60
							6,00	9,09	11,40	13,53
			12,00	2,82	5,55	4,44	1,50	6,15	8,37	10,35
							3,00	7,20	9,48	11,52
							4,50	8,16	10,50	12.60
							6,00	9,09	11,40	13,53
			18,00	3,48	7,98	6,38	1,50	6,38	8,37	10,35
							3,00	7,20	9,48	11,52
							4,50	8,16	10,50	12,60
							6,00	9,09	11,40	13,53
			24,00	3,78	10,74	8,60	1,50	8,60	8,60	10,35
							3,00	8,60	9,48	11,52
							4,50	8,60	10,50	12,60
							6,00	9,09	11,40	13,53

Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais elevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais elevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.
3,60	8,40	0,00	1,38	2,13	1,70	1,50	4,92	6,54	7,98
						3 00	5,64	7,26	8,70
						4,50	6,21	7,83	9,27
						6,00	6,72	8,34	9,78
		0,60	1,44	2,25	1,80	1,50	5,28	7,02	8,58
						3,00	5,70	7,50	9,09
						4,50	6,72	8,46	10,05
						6,00	7,26	9,03	10,59
		1,50	1,50	2,49	1,99	1,50	5,67	7,56	9,24
						3,00	6,51	8,43	10,11
						4,50	7,23	9,15	10,86
						6,00	7,86	9,78	11,49
		3,00	1,59	2,88	2,30	1,50	6,09	8,13	9,96
						3,00	7,02	9,12	10,98
						4,50	7,83	9,96	11,82
						6,00	8,55	10,68	12,57
		6,00	2,04	3,90	3,12	1,50	6,42	8,67	10,71
						3,00	7.47	9,78	11,85
						4,50	8,37	10,74	12,84
						6,00	9,18	11,58	13,71
		9,00	2,61	5,10	4,08	1,50	6,42	8,70	10,83
						3,00	7,47	9,84	12,00
						4,50	8,37	10,83	13,05
						6,00	9,24	11,76	14,01
		12,00	3,06	6,33	5,06	1,50	6,42	8,70	10,83
						3,00	7,47	9,84	12,00
						4,50	8,37	10,83	13,05
						6,00	9,24	11,76	14,01
		18,00	3,72	9,06	7,25	1,50	7,25	8,70	10,83
						3,00	7,47	9,84	12,00
						4,50	8,37	10,83	13,05
						6,00	9,24	11,76	14,01
		24,00	3,96	12,18	9,74	1,50	9,74	9,74	10,83
						3,00	9,74	9,84	12,00
						4,50	9,74	10,83	13,05
						6,00	9,74	11,76	14,01

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.
22,50	36,00	9,00	0,00	1,44	2,37	1,90	1,50	5,16	6.90	8,43
							3,00	5,88	7,62	9,15
							4,50	6,51	8,22	9,75
							6,00	7,02	8,76	10,29
			0.60	1,50	2,55	2,04	1,50	5,52	7.38	9,03
							3,00	6,30	8,16	9,81
							4,50	6,96	8,85	10.50
							6,00	7,56	9,42	11,07
			1,50	1,56	2,82	2,26	1,50	5,91	7,92	9,69
							3,00	6,66	8,79	10,59
							4,50	7,53	9,54	11,34
							6,00	8,16	10,17	12,00
			3,00	1,65	3,21	2,57	1,50	6,33	8,52	10,44
							3,00	7,29	9,48	11,46
							4,50	8,10	10,35	12,30
							6,00	8,82	11,07	13,05
			6,00	2,25	4,44	3,55	1,50	6,66	9,06	11,19
							3,00	7,68	10,14	12,30
							4,50	8,61	11.10	13,29
							6,00	9,42	11,94	14,19
			9,00	2,82	5,76	4,61	1,50	6.66	9,06	11,28
							3,00	7,68	10,17	12,45
							4,50	8.61	11,13	13,47
							6,00	9,42	12,09	14,46
			12,00	3,30	7,17	5,74	1,50	6,66	9.06	11,28
							3,00	7,68	10.17	12,45
							4.50	8,61	11,13	13,47
							6.00	9,42	12,09	14,46
			18,00	3,96	10,20	8,16	1,50	8,16	9.06	11,28
							3,00	8,16	10,17	12,45
							4,50	8,61	11,13	13,47
							6,00	9,42	12,09	14,46
			24,00	4,14	13,68	10,94	1,50	10,94	10,94	11,28
							3,00	10,94	10,94	12,45
							4,50	10,94	11,13	13,47
							6,00	10,94	12,09	14,46

TABLE III.

VOUTES EN ARC DE CERCLE SURBAISSÉ AU SIXIÈME.

Pour ces voûtes, le rapport de la flèche à l'ouverture, $\frac{b}{2a}=\frac{1}{6}$.

L'inclinaison des naissances sur la verticale, $\beta=36^\circ+52'+12''$.

La projection horizontale du joint de naissance, $\delta=\frac{ad}{r}=0{,}6\times d$.

Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
),90	0,15	0,00	0,30	0,30	0,18	1,50	0,60	0,60	0,60
						3,00	0,60	0,60	0,60
						4,50	0,60	0,60	0,60
						6,00	0,60	0,60	0,60
		0,60	0,30	0,30	0,18	1,50	0,78	0,90	0,99
						3,00	0,90	1,02	1,11
						4,50	0,96	1,08	1,17
						6,00	0,99	1,11	1,23
		1,50	0,30	0,30	0,18	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,08	1,23	1,35
						6,00	1,14	1,29	1,44
		3,00	0,30	0,30	0,18	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,20	1,35	1,50
		6,00	0,36	0,36	0,22	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,23	1,41	1,56
		9,00	0,36	0,42	0,25	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,23	1,41	1,56
		12,00	0,39	0,45	0,27	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,23	1,41	1,56
		18,00	0,42	0,51	0,31	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,23	1,41	1,56
		24,00	0,42	0,60	0,36	1,50	0,78	0,90	1,02
						3,00	0,99	1,11	1,26
						4,50	1,11	1,26	1,41
						6,00	1,23	1,41	1,56

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
1,50	1,80	0,30	0 00	0,30	0.30	0,18	1,50	0,60	0,69	0,75
							3,00	0,63	0,72	0,81
							4 50	0.66	0,75	0,81
							6,00	0,66	0,75	0,84
			0,60	0,30	0,30	0,18	1,50	1,02	1,20	1,35
							3,00	1,23	1,41	1,59
							4,50	1.32	1,53	1,68
							6,00	1,38	1,56	1,74
			1,50	0,30	0.30	0,18	1,50	1,14	1,35	1,53
							3,00	1,44	1,68	1,86
							4.50	1,62	1,86	2,07
							6,00	1,74	1,95	2,19
			3,00	0,39	0,39	0,23	1,50	1,14	1,35	1,53
							3,00	1,53	1.77	1,98
							4,50	1,74	2,01	2,25
							6,00	1,92	2,19	2,43
			6,00	0,48	0,48	0.29	1,50	1,14	1,35	1,53
							3,00	1,53	1,80	2,01
							4,50	1,83	2,10	2,37
							6,00	2,04	2,34	2,61
			9,00	0,51	0,54	0,32	1,50	1,14	1,35	1.53
							3,00	1,53	1,80	2,04
							4,50	1,86	2,16	2,43
							6,00	2,10	2,43	2,70
			12,00	0,57	0,63	0,38	1,50	1,14	1,35	1,53
							3,00	1.53	1,80	2,04
							4,50	1,86	2,16	2.43
							6,00	2,10	2,43	2,70
			18,00	0,66	0,78	0.47	1,50	1,14	1,35	1,53
							3,00	1,53	1,80	2,04
							4,50	1.86	2,16	2,43
							6,00	2,10	2,43	2,70
			24,00	0,72	0,87	0 52	1,50	1,14	1,35	1,53
							3.00	1.53	1.80	2,04
							4,50	1,86	2,16	2,43
							6,00	2,10	2,43	2,70

Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
3,60	0,60	0,00	0,30	0,30	0,18	1,50	1,20	1,38	1,56
						3,00	1,35	1,53	1,71
						4,50	1,41	1,62	1,80
						6,00	1,47	1,68	1,86
		0,60	0,36	0,36	0,22	1,50	1,56	1,83	2,10
						3,00	1,89	2,19	2,46
						4,50	2,07	2,37	2,67
						6,00	2,19	2,49	2,76
		1,50	0,45	0,45	0,27	1,50	1,68	2,04	2,34
						3,00	2,19	2,55	2,88
						4,50	2,46	2,85	3,18
						6,00	2,64	3,03	3,36
		3,00	0,54	0,54	0,32	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,34	2,76	3,12
						4,50	2,73	3,15	3,54
						6,00	3,00	3,45	3,84
		6,00	0,69	0,69	0,41	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,37	2,82	3,21
						4,50	2,82	3,30	3,75
						6,00	3,18	3,69	4,14
		9,00	0,84	0,87	0,52	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,37	2,82	3,21
						4,50	2,82	3,30	3,75
						6,00	3,18	3,69	4,14
		12,00	0,93	0,96	0,58	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,37	2,82	3,21
						4,50	2,82	3,30	3,75
						6,00	3,18	3,69	4,14
		18,00	1,08	1,14	0,68	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,37	2,82	3,21
						4,50	2,82	3,30	3,75
						6,00	3,18	3,69	4,14
		24,00	1,17	1,23	0,74	1,50	1,74	2,13	2,46
						3,00	2,37	2,82	3,21
						4,50	2,82	3,30	3,75
						6,00	3,18	3,69	4,14

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.
4,50	5,40	0,90	0,00	0,36	0,39	0,23	1,50	1,56	1,86	2,13
							3,00	1,83	2,13	2,40
							4,50	1,98	2,28	2,55
							6,00	2,07	2,37	2,61
			0,60	0,48	0,48	0,29	1,50	1,95	2,37	2,73
							3,00	2,40	2,82	3,21
							4,50	2,67	3,09	3,45
							6,00	2,82	3,24	3,63
			1,50	0,54	0,54	0,32	1,50	2,16	2,64	3,06
							3,00	2,76	3,27	3,72
							4,50	3,15	3,66	4,11
							6,00	3,39	3,90	4,38
			3,00	0,72	0,72	0,43	1,50	2,19	2,94	3,15
							3,00	2,91	3,48	3,96
							4,50	3,39	3,99	4,50
							6,00	3,75	4,35	4,89
			6,00	0,93	0,93	0,56	1,50	2 19	2,70	3,18
							3,00	2,94	3,54	4,08
							4,50	3,51	4,14	4,74
							6,00	3,96	4,62	5,22
			9,00	1,08	1,08	0,65	1,50	2,19	2,70	3,18
							3,00	2,94	3,54	4,08
							4,50	3,51	4,14	4,74
							6,00	3,99	4,68	5,31
			12,00	1,20	1,20	0,72	1,50	2,19	2,70	3,18
							3,00	2,94	3,54	4,08
							4,50	3,51	4,14	4,74
							6,00	3,99	4,68	5,31
			18,00	1,32	1,35	0,81	1,50	2,19	2,70	3,18
							3,00	2,94	3,54	4,08
							4,50	3,51	4,14	4,74
							6,00	3,99	4,68	5,31
			24,00	1,41	1,65	0,99	1,50	2,19	2,70	3,18
							3,00	2,94	3,54	4,08
							4,50	3,51	4,14	4,74
							6,00	3,99	4,68	5,31

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voûte à la clef.	Épaisseur de la voûte à la culée.	Épaisseur de la voûte: Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2: pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5: pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3: pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m	m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m
6,00	7,20	1,20	0,00	0,45	0,48	0,29	1,50	1 92	2,31	2.67
							3,00	2,28	2,67	3.03
							4,50	2,49	2,88	3,24
							6,00	2 61	3,00	3,36
			0,60	0,57	0,57	0,34	1,50	2 31	2,82	3,30
							3,00	2.85	3.39	3,87
							4.50	3,18	3.72	4,20
							6,00	3,42	3,93	4,41
			1,50	0,69	0,69	0,41	1,50	2,52	3,12	3,63
							3,00	3.21	3,84	4,38
							4,50	3,66	4.29	4,86
							6,00	3,99	4.62	5,19
			3,00	0,90	0,90	0 54	1,50	2,58	3,21	3.81
							3,00	3,39	4,08	4,68
							4.50	3,96	4.65	5,31
							6,00	4,35	5,10	5,76
			6,00	1,14	1,14	0,68	1.50	2.58	3,24	3,84
							3,00	3,45	4,20	4,86
							4.50	4,11	4,89	5,61
							6,00	4,62	5,43	6,18
			9,00	1,26	1,26	0,76	1,50	2,58	3,24	3,87
							3,00	3,45	4,23	4,92
							4,50	4,17	4,98	5,73
							6,00	4,74	5,61	6,39
			12,00	1,35	1,35	0,81	1,50	2.58	3,24	3.87
							3,00	3,45	4,23	4,92
							4,50	4,17	5,01	5,76
							6,00	4,77	5,67	6,48
			18,00	1,47	1,68	1,01	1,50	2,58	3 24	3,87
							3,00	3,45	4,23	4,92
							4.50	4.17	5.01	5,76
							6,00	4.77	5,67	6,48
			24,00	1,53	2,07	1,24	1.50	2,58	3.24	3.87
							3,00	3,45	4,23	4,92
							4,50	4.17	5,01	5.76
							6,00	4,77	5,67	6,48

Rayon.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r.	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m	m.	m.	m
7,50	9,00	1,50	0,00	0,54	0,60	0,36	1,50	2,22	2,73	3,18
							3,00	2,70	3,18	3.63
							4,50	2,97	3,45	3.90
							6,00	3,12	3,60	4,05
			0,60	0,66	0,72	0,43	1,50	2,64	3,27	3,8[illegible]
							3,00	3,27	3,90	4,17
							4,50	3,66	4,29	4,86
							6,00	3,93	4,56	5,13
			1,50	0,84	0,87	0,52	1,50	2,85	3,54	4,20
							3,00	3,60	4,35	5,01
							4,50	4,14	4,86	5,55
							6,00	4,50	5,25	5,94
			3,00	1,05	1,05	0,63	1,50	2,94	3,72	4,41
							3,00	3,84	4,65	5,37
							4,50	4,47	5,31	6,06
							6,00	4,92	5,79	6,5[illegible]
			6,00	1,26	1,26	0,76	1,50	3.00	3,81	4,[illegible]
							3,00	3,96	4,86	5,
							4.50	4,71	5,64	6
							6,00	5,28	6,27	7
			9,00	1,38	1,38	0,83	1,50	3,00	3,84	
							3,00	4,02	4,92	
							4,50	4,80	5,79	
							6,00	5,46	6,48	
			12,00	1,47	1,59	0,95	1,50	3,00	3,84	
							3,00	4,02	4,92	
							4,50	4,80	5,82	
							6,00	5,49	6,54	
			18,00	1,56	1,98	1,19	1.50	3,00	3,84	
							3,00	4,02	4,92	
							4,50	4,80	5,82	
							6,00	5,49	6,57	
			24,00	1,62	2,46	1,48	1,50	3,00	3,84	
							3,00	4,02	4,92	
							4,50	4,80	5,82	
							6,00	5,49	6,57	

Rayon des intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
.	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.
,00	10,80	1,80	0,00	0,63	0,72	0,43	1,50	2,55	3.15	3,69
							3,00	3,06	3,66	4,20
							4,50	3,39	3,99	4,53
							6,00	3,60	4,20	4,71
			0,60	0,78	0,84	0,50	1,50	2,97	3.69	4,32
							3,00	3,66	4.38	5,04
							4,50	4,08	4,83	5,49
							6,00	4,41	5,13	5,79
			1,50	0,96	0,99	0,59	1,50	3,18	3.99	4,74
							3,00	4,02	4,86	5,61
							4,50	4,59	5,43	6,21
							6,00	4,98	5,85	6,63
			3,00	1,17	1,17	0,70	1,50	3,33	4,20	5,01
							3,00	4,26	5.19	6,03
							4,50	4,95	5,91	6,78
							6,00	5,46	6,45	7,35
			6,00	1,35	1,35	0,81	1,50	3,42	4,38	5,22
							3,00	4,47	5,49	6,42
							4,50	5,28	6,36	7,32
							6,00	5,91	7,05	8,04
			9,00	1,47	1,56	0,94	1,50	3,42	4,41	5,28
							3,00	4,50	5,58	6,54
							4,50	5,37	6,51	7,53
							6,00	6,09	7,29	8,34
			12,00	1,53	1,80	1,08	1,50	3.42	4.41	5,28
							3,00	4,53	5,61	6.57
							4,50	5,43	6,60	7,65
							6,00	6,18	7,44	8,52
			18,00	1,62	2,31	1,39	1,50	3,42	4,41	5,28
							3,00	4,53	5,61	6,57
							4,50	5,43	6,60	7,65
							6,00	6,18	7,44	8,58
			21,00	1,83	3,00	1,80	1,50	3,42	4,41	5,28
							3,00	4,53	5,61	6,57
							4,50	5,43	6,60	7,65
							6,00	6,18	7,44	8,58

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute, projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.
10,50	12.60	2,10	0,00	0,75	0,87	0,52	1,50	2,85	3,57	4,20
							3,00	3,42	4,14	4,77
							4,50	3,84	4,53	5,13
							6,00	4,08	4,77	5,40
			0,60	0,93	0,99	0,59	1,50	3,24	4,08	4,83
							3,00	3,99	4,83	5,58
							4,50	4.50	5,34	6,09
							6,00	4,86	5,70	6,45
			1,50	1,08	1,11	0,67	1,50	3,51	4,44	5,28
							3,00	4,38	5,34	6,18
							4.50	5,01	5,97	6,84
							6,00	5,46	6,45	7,32
			3,00	1,26	1,26	0,76	1,50	3,66	4,68	5.58
							3,00	4,68	5.73	6,69
							4,50	5,40	6.51	7,50
							6,00	6,00	7,11	8,16
			6,00	1,44	1,50	0 90	1,50	3,81	4.89	5,85
							3,00	4,92	6,06	7,11
							4,50	5,79	6,99	8,10
							6,00	6,48	7,74	8,88
			9,00	1,53	1,77	1,06	1,50	3,84	4,95	5,94
							3,00	4,98	6,21	7,29
							4,50	5,94	7,20	8,37
							6,00	6,72	8,04	9,24
			12,00	1,59	2,04	1,22	1,50	3,84	4,95	5,97
							3,00	5.01	6,24	7,35
							4,50	6,00	7,32	8,49
							6,00	6,81	8,19	9,42
			18,00	1,83	2,76	1.66	1,50	3,84	4,95	5,97
							3.00	5,01	6,24	7,35
							4,50	6.00	7,32	8,49
							6,00	6,81	8,19	9,42
			24,00	2,16	3,66	2.20	1.50	3,84	4,95	5,97
							3.00	5,01	6.24	7,35
							4,50	6,00	7,32	8,49
							6,00	6,81	8,19	9,42

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voûte à la clef.	Épaisseur de la voûte à la culée.	Épaisseur de la voûte — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2.5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	14,40	2 40	0,00	0,87	0,99	0,59	1,50	3,15	3,96	4,68
							3,00	3,81	4,62	5,34
							4,50	4,23	5,04	5,76
							6,00	4,56	5,34	6,06
			0,60	1,02	1,11	0,67	1,50	3,54	4,47	5,31
							3,00	4,32	5,28	6,12
							4,50	4,86	5,82	6,66
							6,00	5,28	6,21	7,05
			1,50	1,17	1,20	0,72	1,50	3,84	4,86	5,79
							3,00	4,74	5,79	6,75
							4,50	5,40	6,48	7,44
							6,00	5,91	6,99	7,95
			3,00	1,35	1,35	0,81	1,50	4,02	5,16	6,15
							3,00	5,07	6,24	7,29
							4,50	5,85	7,05	8,16
							6,00	6,45	7,71	8,79
			6,00	1,50	1,68	1,01	1,50	4,17	5,40	6,48
							3,00	5,34	6,63	7,80
							4,50	6,27	7,62	8,82
							6,00	7,02	8,40	9,66
			9,00	1,59	2,01	1,21	1,50	4,20	5,46	6,57
							3,00	5,43	6,78	7,98
							4,50	6,42	7,86	9,12
							6,00	7,26	8,73	10,08
			12,00	1,65	2,34	1,40	1,50	4,20	5,46	6,57
							3,00	5,43	6,81	8,04
							4,50	6,48	7,95	9,24
							6,00	7,35	8,88	10,26
			18,00	2,13	3,30	1,98	1,50	4,20	5,46	6,57
							3,00	5,43	6,81	8,04
							4,50	6,48	7,95	9,24
							6,00	7,35	8,88	10,26
			24,00	2,46	4,35	2,61	1,50	4,20	5,46	6,57
							3,00	5,43	6,81	8,04
							4,50	6,48	7,95	9,24
							6,00	7,35	8,88	10,26

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute: projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e'	e''
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
13,50	16,20	2,70	0,00	0,99	1,08	0,65	1,50	3,45	4,38	5,19
							3,00	4,14	5,07	5,88
							4,50	4,65	5,55	6,36
							6,00	4,98	5,88	6,69
			0,60	1,14	1,20	0,72	1,50	3,81	4,86	5,79
							3,00	4,65	5,70	6,63
							4,50	5,25	6,30	7,23
							6,00	5,70	6,75	7,68
			1,50	1,26	1,29	0,77	1,50	4,11	5,25	6,27
							3,00	5,07	6,24	7,29
							4,50	5,79	6,96	8,04
							6,00	6,33	7,53	8,58
			3,00	1,41	1,50	0,90	1,50	4,35	5,58	6,72
							3,00	5,43	6,72	7,89
							4,50	6,27	7,59	8,79
							6,00	6,93	8,28	9,48
			6,00	1,56	1,89	1,13	1,50	4,53	5,85	7,05
							3,00	5,73	7,17	8,43
							4,50	6,72	8,19	9,51
							6,00	7,50	9,03	10,38
			9,00	1,62	2,22	1,33	1,50	4,59	5,97	7,20
							3,00	5,88	7,35	8,67
							4,50	6,93	8,49	9,87
							6,00	7,80	9,42	10,89
			12,00	1,86	2,73	1,64	1,50	4,59	5,97	7,20
							3,00	5,88	7,35	8,67
							4,50	6,93	8,49	9,87
							6,00	7,80	9,42	10,92
			18,00	2,40	3,87	2,32	1,50	4,59	5,97	7,20
							3,00	5,88	7,35	8,67
							4,50	6,93	8,49	9,87
							6,00	7,80	9,42	10,92
			24,00	2,76	5,10	3,06	1,50	4,59	5,97	7,20
							3,00	5,88	7,35	8,67
							4,50	6,93	8,49	9,87
							6,00	7,80	9,42	10,92

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
,00	18,00	3,00	0,00	1,08	1,17	0,70	1,50	3,72	4,74	5,64
							3,00	4,47	5,49	6,39
							4,50	5,01	6,00	6,90
							6,00	5,40	6,39	7,29
			0,60	1,23	1,29	0,77	1,50	4,08	5,25	6,24
							3,00	4,98	6,12	7,08
							4,50	5,61	6,75	7,80
							6,00	6,09	7,23	8,25
			1,50	1,32	1,44	0,86	1,50	4,41	5,64	6,78
							3,00	5,40	6,69	7,83
							4,50	6,15	7,44	8,58
							6,00	6,72	8,04	9,18
			3,00	1,44	1,68	1,01	1,50	4,65	6,03	7,23
							3,00	5,79	7,20	8,46
							4,50	6,66	8,10	9,39
							6,00	7,35	8,82	10,14
			6,00	1,59	2,07	1,24	1,50	4,86	6,33	7,65
							3,00	6,12	7,68	9,06
							4,50	7,14	8,76	10,20
							6,00	7,98	9,63	11,13
			9,00	1,74	2,52	1,51	1,50	4,92	6,42	7,77
							3,00	6,24	7,83	9,27
							4,50	7,32	9,00	10,53
							6,00	8,25	9,99	11,55
			12,00	2,10	3,18	1,91	1,50	4,92	6,42	7,77
							3,00	6,24	7,83	9,27
							4,50	7,32	9,00	10,53
							6,00	8,25	9,99	11,55
			18,00	2,67	4,47	2,68	1,50	4,92	6,42	7,77
							3,00	6,24	7,83	9,27
							4,50	7,32	9,00	10,53
							6,00	8,25	9,99	11,55
			24,00	3,03	5,88	3,53	1,50	4,92	6,42	7,77
							3,00	6,24	7,83	9,27
							4,50	7,32	9,00	10,53
							6,00	8,25	9,99	11,55

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2.5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
16,50	19 80	3,30	0,00	1,17	1,29	0,77	1,50	4,05	5,16	6,18
							3,00	4,83	5,94	6,93
							4,50	5,40	6,51	7,50
							6,00	5,82	6,93	7,89
			0,60	1,29	1,47	0,88	1,50	4,35	5,58	6,69
							3,00	5,25	6,51	7,62
							4,50	5,94	7,20	8,31
							6,00	6,45	7,68	8,82
			1,50	1,38	1,62	0,97	1,50	4,68	6,03	7,23
							3,00	5,70	7,08	8,31
							4,50	6,48	7,89	9,12
							6,00	7,11	8,49	9,75
			3,00	1,50	1,86	1,12	1,50	4,92	6,39	7,68
							3,00	6,06	7,59	8,91
							4,50	6,96	8,52	9,90
							6,00	7,68	9,27	10,65
			6,00	1,62	2,31	1,39	1,50	5,22	6,81	8,22
							3,00	6,51	8,16	9,66
							4,50	7,56	9,30	10,83
							6,00	8,43	10,23	11,82
			9,00	1,95	2,91	1,75	1,50	5.22	6,81	8,28
							3,00	6.51	8,25	9,78
							4,50	7.62	9,42	11.04
							6,00	8,55	10,44	12,09
			12,00	2,34	3,63	2,18	1,50	5,22	6,81	8,28
							3,00	6,51	8,25	9,78
							4,50	7,62	9,42	11,04
							6,00	8,55	10,44	12,09
			18,00	2,94	5,13	3,08	1,50	5,22	6,81	8,28
							3,00	6,51	8,25	9,78
							4,50	7,62	9,42	11,04
							6,00	8,55	10,44	12,09
			24,00	3,30	6,75	4,05	1,50	5,22	6,81	8,28
							3,00	6,51	8,25	9,78
							4,50	7,62	9,42	11,04
							6,00	8,55	10,44	12,09

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m	m.	m.
5,00	21,60	3,60	0,00	1,26	1,50	0,90	1,50	4,26	5,46	6,54
							3,00	5,07	6,30	7,38
							4,50	5,67	6,90	7,95
							6,00	6,15	7,35	8,40
			0,60	1,35	1,62	0,97	1,50	4,62	5,94	7,14
							3,00	5,55	6,90	8,10
							4,50	6,27	7,59	8,79
							6,00	6,81	8,13	9,33
			1,50	1,44	1,80	1,08	1,50	4,95	6,42	7,71
							3,00	6,00	7,50	8,82
							4,50	6,81	8,31	9,63
							6,00	7,47	8,97	10,29
			3,00	1,53	2,04	1,22	1,50	5,25	6,84	8,25
							3,00	6,45	8,07	9,54
							4,50	7,38	9,03	10,53
							6,00	8,16	9,84	11,34
			6,00	1,68	2,55	1,53	1,50	5,52	7,23	8,76
							3,00	6,84	8,64	10,23
							4,50	7,95	9,78	11,43
							6,00	8,85	10,74	12,45
			9,00	2,16	3,36	2,02	1,50	5,52	7,23	8,79
							3,00	6,84	8,64	10,29
							4,50	7,95	9,84	11,55
							6,00	8,85	10,86	12,63
			12,00	2,58	4,17	2,50	1,50	5,52	7,23	8,79
							3,00	6,84	8,64	10,29
							4,50	7,95	9,84	11,55
							6,00	8,85	10,86	12,63
			18,00	3,21	5,85	3,51	1,50	5,52	7,23	8,79
							3,00	6,84	8,64	10,29
							4,50	7,95	9,84	11,55
							6,00	8,85	10,86	12,63
			24,00	3,54	7,65	4,59	1,50	5,52	7,23	8,79
							3,00	6,84	8,64	10,29
							4,50	7,95	9,84	11,55
							6,00	8,85	10,86	12,63

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m	m.	m.	m.	m	m.	m	m.	m	m.
19,50	23,40	3,90	0,00	1,32	1,68	1,01	1,50	4,50	5,79	6,96
							3,00	5,34	6,66	7,80
							4,50	6,00	7,29	8,43
							6,00	6,48	7,77	8,91
			0,60	1,41	1,83	1,10	1,50	4,86	6,30	7,56
							3,00	5,82	7,29	8,55
							4,50	6,57	8,01	9,27
							6,00	7,14	8,58	9,84
			1,50	1,47	1,98	1,19	1,50	5,43	7,05	8,46
							3,00	6,54	8,19	9,63
							4,50	7,41	9,03	10,50
							6,00	8,07	9,75	11,22
			3,00	1,56	2,25	1,35	1,50	5,82	7,56	9,15
							3,00	7,05	8,85	10,47
							4,50	8,07	9,90	11,52
							6,00	8,88	10,71	12,39
			6,00	1,86	2,91	1,76	1,50	5,82	7,59	9,24
							3,00	7,11	9,00	10,71
							4,50	8,22	10,17	11,94
							6,00	9,15	11,16	12,96
			9,00	2,40	3,84	2,30	1,50	5,82	7,59	9,27
							3,00	7,11	9,00	10,77
							4,50	8,22	10,20	12,03
							6,00	9,15	11,22	13,11
			12,00	2,82	4,71	2,83	1,50	5,82	7,59	9,27
							3,00	7,11	9,00	10,77
							4,50	8,22	10,20	12,03
							6,00	9,15	11,22	13,11
			18,00	3,48	6,63	3,98	1,50	5,82	7,59	9,27
							3,00	7,11	9,00	10,77
							4,50	8,22	10,20	12,03
							6,00	9,15	11,22	13,11
			24,00	3,78	8,64	5,18	1,50	5,82	7,59	9,27
							3,00	7,11	9,00	10,77
							4,50	8,22	10,20	12,03
							6,00	9,15	11,22	13,11

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	Épaisseur de la voute à la clef.	Épaisseur de la voute à la culée.	Épaisseur de la voute — projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2 — pour les ponts-route sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 2,5 — pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	Épaisseur de la culée en admettant le coefficient de stabilité 3 — pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	2a	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.	m.	m.
,00	25,20	4,20	0,00	1,38	1,89	1,13	1,50	4,74	6,12	7,38
							3,00	5,61	7,02	8,25
							4,50	6,27	7,68	8,91
							6,00	6,81	8,19	9,39
			0,60	1,44	2,01	1,21	1,50	5,10	6,63	7,98
							3,00	6,09	7,62	8,97
							4,50	6,84	8,37	9,75
							6,00	7,44	8,97	10,35
			1,50	1,50	2,19	1,34	1,50	5,46	7,11	8,58
							3,00	6,57	8,25	9,75
							4,50	7,44	9,12	10,62
							6,00	8,13	9,84	11,34
			3,00	1,59	2,49	1,49	1,50	5,79	7,56	9,15
							3,00	7,02	8,85	10,50
							4,50	8,01	9,90	11,55
							6,00	8,85	10,74	12,42
			6,00	2,04	3,33	2,00	1,50	6,03	7,98	9,69
							3,00	7,38	9,39	11,19
							4,50	8,49	10,56	12,42
							6,00	9,45	11,55	13,47
			9,00	2,61	4,32	2,59	1,50	6,03	7,98	9,72
							3,00	7,38	9,39	11,22
							4,50	8,49	10,59	12,51
							6,00	9,45	11,64	13,62
			12,00	3,06	5,31	3,19	1,50	6,03	7,98	9,72
							3,00	7,38	9,39	11,22
							4,50	8,49	10,59	12,51
							6,00	9,45	11,64	13,62
			18,00	3,72	7,41	4,45	1,50	6,03	7,98	9,72
							3,00	7,38	9,39	11,22
							4,50	8,49	10,59	12,51
							6,00	9,45	11,64	13,62
			24,00	3,96	9,66	5,80	1,50	6,03	7,98	9,72
							3,00	7,38	9,39	11,22
							4,50	8,49	10,59	12,51
							6,00	9,45	11,64	13,62

Rayon de l'intrados.	Ouverture.	Flèche.	Hauteur de la charge sur la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la clef.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE à la culée.	ÉPAISSEUR DE LA VOUTE Projection horizontale du joint de naissance.	Hauteur de la culée au-dessous des naissances.	ÉPAISSEUR DE LA CULÉE EN ADMETTANT LE COEFFICIENT DE STABILITÉ 2 pour les ponts-route sous des remblais élevés.	2,5 pour les ponts-route sous des remblais peu élevés et pour les ponts-rails sous des remblais élevés.	3 pour les ponts-rails sous des remblais peu élevés.
r	$2a$	b	h	c	d	δ	f	e	e	e
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.
22,50	27,00	4,50	0,00	1,44	2,10	1,26	1,50	4,98	6,45	7,77
							3,00	5,88	7,35	8,67
							4,50	6,57	8,04	9,36
							6,00	7,11	8,58	9,90
			0,60	1,50	2,22	1,33	1,50	5,34	6,96	8,40
							3,00	6,36	7,98	9,42
							4,50	7,14	8,76	10,20
							6,00	7,77	9,39	10,83
			1,50	1,56	2,43	1,46	1,50	5,70	7,47	9,03
							3,00	6,84	8,61	10,20
							4,50	7,74	9,51	11,10
							6,00	8,46	10,23	11,85
			3,00	1,65	2,73	1,64	1,50	6,09	7,98	9,66
							3,00	7,35	9,27	11,01
							4,50	8,37	10,35	12,09
							6,00	9,21	11,19	12,99
			6,00	2,25	3,78	2,27	1,50	6,27	8,34	10,17
							3,00	7,62	9,75	11,64
							4,50	8,73	10,92	12,87
							6,00	9,69	11,94	13,92
			9,00	2,82	4,86	2,92	1,50	6,27	8,34	10,20
							3,00	7,62	9,75	11,70
							4,50	8,73	10,95	12,99
							6,00	9,69	12,00	14,10
			12,00	3,30	5,97	3,58	1,50	6,27	8,34	10,20
							3,00	7,62	9,75	11,70
							4,50	8,73	10,95	12,99
							6,00	9,69	12,00	14,10
			18,00	3,96	8,31	4,99	1,50	6,27	8,34	10,20
							3,00	7,62	9,75	11,70
							4,50	8,73	10,95	12,99
							6,00	9,69	12,00	14,10
			24,00	4,11	10,77	6,46	1,50	6,27	8,34	10,20
							3,00	7,62	9,75	11,70
							4,50	8,73	10,95	12,99
							6,00	9,69	12,00	14,10

LIVRE III.

DES PRESSIONS DANS L'INTÉRIEUR D'UN MASSIF DE TERRE.

§ 67. — Généralités.

Nous entendons ici par *terre* un corps homogène et incompressible, dont les plus petites particules peuvent recevoir des déplacements relatifs, mais qui opposent à ce déplacement une résistance appelée *frottement*. A ce frottement peut aussi se joindre la force de *cohésion*, qui s'oppose à la séparation des molécules voisines résultant du déplacement relatif.

La loi de répartition de la pression statique, dans l'intérieur d'un massif de terre en équilibre, est encore inconnue entièrement. L'ouvrage d'Ortmann, intitulé *la Statique du sable*, et publié en 1847, a cherché à établir cette loi, mais sans succès, cette théorie étant fondée sur des hypothèses en désaccord avec la nature de la terre.

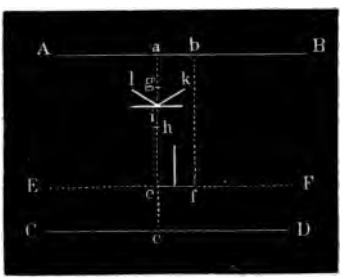
On s'est contenté, dans l'application, de chercher la pression résultante qu'exerce un massif de terre sur une partie finie des parois qui le limitent. A cet effet, on a considéré la partie du massif qui exerce un effort maximum pour glisser sur sa base et chasser devant elle la paroi qui résiste à cette poussée. Mais on n'a pas su donner une solution exacte et générale de ce problème, qui n'est pourtant qu'un cas particulier de la statique des terres ; en effet, on a toujours accepté pour point de départ cette hypothèse dénuée de preuves, que *le massif de plus grande poussée a une base plane.*

Il serait désirable de posséder un développement rationnel et complet de la statique des terres permettant d'éclaircir tous les phénomènes qui s'y rattachent, ainsi qu'on explique en hydrostatique

les phénomènes d'équilibre des liquides parfaits ; mais il faudrait pour cela connaître la loi de répartition dans tous les points du massif d'une pression exercée en un point de sa surface. Peut-être appartiendra-t-il à la sagacité d'un géomètre de déduire cette loi générale de principes purement théoriques ; ou bien cette loi pourra être découverte empiriquement par des expériences pratiques. En attendant, on peut, sans le secours d'hypothèses, déduire des principes généraux de la statique les conditions d'équilibre et la répartition des pressions dans un massif de terre, en se restreignant au cas simple que nous allons définir.

Soit un massif (fig. 122) indéfini dans toutes les directions horizontales, porté inférieurement par un plan horizontal fixe CD et limité supérieurement à un plan horizontal AB chargé uniformément par une pression extérieure. Les propriétés physiques du système sont les suivantes : ses parties ne sauraient éprouver de changement de volume sensible ; elles sont cependant mobiles les unes par rapport aux autres ; ce déplacement relatif donne lieu à la force de frottement parallèle à la face de contact, et à une force de cohésion parallèle à la face de contact et proportionnelle à l'étendue de cette face ; enfin chaque tranche de terre supporte les poids qui sont appliqués verticalement au-dessus d'elle.

Fig. 122.



Dans un tel système on peut établir immédiatement les deux lois suivantes :

1° La pression qui s'exerce sur un élément *e f* d'une section horizontale quelconque EF est nécessairement verticale. Les dispositions physiques des molécules en contact ne s'opposeraient pas à ce que cette pression fût oblique, mais la verticalité de la pression résulte de la symétrie complète qui existe dans le massif autour de la verticale de l'élément *e f*, en sorte qu'il n'y a pas plus de raison pour que la pression se dirige plutôt d'un côté que de l'autre. Comme, en outre, la section EF supporte tout le poids du massif situé au-dessus, et que, en vertu de la symétrie, tous les éléments de cette tranche doivent être également chargés à surface égale, il s'ensuit que la pression verticale qui s'exerce sur *ef* égale le poids du prisme

de terre *aefb* qui s'élève verticalement au-dessus de *ef*, plus la charge supérieure correspondante, appliquée sur *ab*.

2° Dans une section verticale quelconque *ac*, chaque élément superficiel *gh* ne peut supporter qu'une pression horizontale, normale à l'élément. Car admettons que cette pression n'agisse pas normalement à *gh*, mais obliquement suivant *ki*, en considérant l'action de la masse située à droite du plan *ac;* alors, en considérant l'action de la masse située à gauche de *ac*, symétrique à la première, on devrait admettre une pression *li* symétrique de *ki;* mais les deux forces *ki*, *li* ne sauraient se faire équilibre.

En outre, il est clair qu'à une même profondeur *ai*, au-dessous de AB, la pression horizontale appliquée à l'unité de surface dans une direction quelconque autour du point *i* a nécessairement la même valeur.

§ 68. — Valeur de la poussée des terres d'après les considérations précédentes.

Nous allons déduire de nos deux principes ci-dessus la valeur de la poussée qui s'exerce dans l'intérieur d'un massif de terre sur une portion déterminée d'une section verticale, ainsi que sur une surface d'inclinaison quelconque.

Fig. 123.

Nous conservons le massif déjà décrit : soit CDFE (fig. 123) un tronc de prisme à axe vertical et à section rectangulaire infiniment petite ; sa base supérieure CD est sur la face supérieure du massif, sa base inférieure est déterminée par un plan sécant EF d'inclinaison quelconque. Soient :

A la section CD infiniment petite de ce prisme,

h sa hauteur verticale moyenne GH,

α l'angle GHF de l'axe vertical GH avec la base inférieure EF,

p la pression atmosphérique sur l'unité de surface de AB,

w le poids de l'unité de volume du massif,

P la pression résultante qu'exerce le massif ambiant contre la base oblique EF,

p la même pression, rapportée à l'unité de la surface EF,

ψ l'angle de cette pression avec la normale à la surface EF,

N, S les composantes de la force P, respectivement normale et parallèle à EF,

n, s les mêmes composantes, rapportées à l'unité de surface de EF,

Q la force horizontale qui s'exerce contre la projection verticale EI de la base EF, à raison de la pression du massif ambiant,

q la même force, rapportée à l'unité de surface de EI,

φ l'angle du frottement de deux portions du massif se touchant par des faces planes, sans tenir compte de la cohésion,

k la grandeur de la force de cohésion rapportée à l'unité de surface de contact, force parallèle à la surface de contact et qui doit être détruite ainsi que le frottement avant que le glissement puisse s'opérer sur cette face,

K la grandeur de la force de cohésion pour l'étendue entière de la face EF,

W le poids du prisme de terre GH tout entier, y compris la pression atmosphérique qui s'exerce verticalement sur la surface supérieure CD.

Nous avons vu que la pression du massif ambiant sur toutes les parties des parois verticales du prisme CEFD est dirigée horizontalement, que la pression sur chaque élément horizontal est verticale : il s'ensuit que, pour chaque tranche horizontale telle que $cdfi$, les pressions qui s'exercent contre les parois verticales se font équilibre. Il en est ainsi de toutes les tranches, depuis la face supérieure jusqu'au plan horizontal IF qui passe par le point le plus haut de la base inférieure. Laissant donc de côté tout ce groupe de forces horizontales qui se détruisent, on voit que dans le prisme triangulaire IEF, les trois forces W, Q et P doivent se faire équilibre.

Si l'on connaissait la direction de la force P, qui représente l'action du massif ambiant sur EF, les conditions d'équilibre de trois forces concourantes donneraient facilement la grandeur de cette force et aussi celle de la poussée Q. Plus la direction de P s'approchera de la verticale, plus la poussée horizontale Q sera faible ; puisque P pourra, d'autant plus complétement, faire équilibre au poids W sans l'aide d'une force perpendiculaire. D'ailleurs cela résulte du principe de la moindre résistance, d'après lequel la composante horizontale de P, qui est égale et contraire à Q, doit être un minimum. En effet,

n ne voit pas pourquoi la force Q serait plus grande qu'il n'est né-
ssaire pour maintenir le massif GH sur le plan incliné EF; mais
, artificiellement, on venait à augmenter la poussée Q au delà du
inimum, l'équilibre du prisme GH subsisterait, seulement la direc-
on de la résistance P appliquée à la base EF s'éloignerait davantage
e la verticale.

Ce cas se réaliserait, par exemple, si l'on appliquait extérieurement
1 massif des forces horizontales pour le comprimer entre ses parois.
n'en résulterait pas de déformation, puisque nous avons supposé
système indéformable; ainsi, pourvu que les forces extérieures ne
épassent pas une certaine limite, la face supérieure AB ne serait
as relevée; les proportions géométriques demeureraient les mêmes
ans le massif; mais la pression extérieure aurait toujours cet effet
'augmenter les pressions horizontales intérieures Q, et par suite
'éloigner de la verticale les directions des résistances P. Si mainte-
ant on enlève successivement toutes ces forces de compression,
n s'arrêtera à un minimum au-dessous duquel on ne saurait des-
endre sans détruire l'équilibre du massif. Dans le cas où le massif
'est limité horizontalement que par des parois fixes, qui ne déve-
ppent aucune pression, mais qui résistent seulement aux pres-
ons qu'elles reçoivent, le minimum des forces extérieures répond
videmment au minimum déjà considéré de la poussée Q, lequel est
écessaire pour empêcher le glissement du prisme GH sur la base
nclinée EF.

Nous avons supposé implicitement, ci-dessus, que le prisme GH est
n tout invariable, ne pouvant subir aucune séparation ailleurs que
ans le plan de la base EF. Mais par la nature de la terre qui com-
ose le massif, il y a séparation ou glissement possible suivant toute
utre base plus ou moins inclinée; et il est clair que la poussée hori-
ontale Q, ou plutôt la poussée q par unité superficielle de la partie
nférieure de la paroi CE, doit être assez grande pour empêcher le
léplacement du prisme suivant la section pour laquelle la tendance
u glissement est un maximum. Admettons que cette base ait l'incli-
naison E′F′, alors la poussée horizontale Q′, capable d'empêcher le
glissement du prisme GH sur cette base particulière, sera la vraie
poussée horizontale qui s'exerce contre la face E′I′. Cette pression
étant connue, on en déduit facilement la poussée Q sur la face EI, et
a pression P sur la face EF, ainsi que la direction de P; on trouve
ainsi que ces deux dernières forces sont plus grandes, et que la di-

rection de P s'écarte plus de la verticale qu'il ne serait nécessaire si le prisme ne pouvait glisser que sur EF.

Il faut donc déterminer l'inclinaison de la base EF, pour laquelle la pression horizontale q qui répond à l'unité superficielle soit maximum. On remarquera pour cela que, tant que l'inclinaison de EF sur l'horizon ne dépasse pas une certaine limite, la pression P sur la base du prisme GH, considéré comme un solide invariable, est toujours verticale : cette surface EF peut développer dans ces conditions, au moyen du frottement et de la cohésion, une composante horizontale sans l'intervention d'aucune force extérieure ; la surface EF soutient ainsi directement le poids du prisme. Au-dessous de la limite dont il s'agit, il n'y a pas lieu ainsi de chercher le maximum de la pression q. Au-dessus de la limite, on tirera des considérations qui précèdent ou du principe de la moindre résistance le corollaire suivant : toute la faculté de résistance de la surface EF est d'abord mise en jeu, et, si cette résistance possible ne suffit pas pour maintenir l'équilibre du prisme GH, la force supplémentaire indispensable sera fournie par la poussée horizontale Q.

Décomposons la force P en ses composantes N et S, respectivement normale et parallèle à la surface EF ; la force S se compose de la somme des deux forces N tang. φ et K, c'est-à-dire du frottement correspondant à la pression normale N, et de la cohésion qui existe sur la surface EF. On obtient ainsi une direction de P aussi rapprochée de la verticale qu'il est possible, sous les conditions physiques de la surface EF.

Décomposons ensuite les deux forces W et Q en leurs composantes respectives, normales et parallèles à la surface EF ; on peut poser les deux équations d'équilibre :

$$W \sin\alpha + Q \cos\alpha = N, \qquad (1)$$
$$W \cos\alpha - Q \sin\alpha = N \operatorname{tang}\varphi + K. \qquad (2)$$

Or, en exprimant W, Q, N, K en fonction des forces correspondantes, appliquées à l'unité de surface, on a

$$W = whA + \rho A,$$
$$Q = q.\overline{EI} = \frac{qA}{\operatorname{tang}\alpha},$$
$$N = n.\overline{EF} = \frac{nA}{\sin\alpha},$$
$$K = k.\overline{EF} = \frac{kA}{\sin\alpha}.$$

Les équations (1), (2) peuvent donc être mises sous la forme

$$(wh+\rho)\sin^2\alpha + q\cos^2\alpha = n, \tag{3}$$

$$(wh+\rho)\sin\alpha\cos\alpha - q\sin\alpha\cos\alpha = n\,\mathrm{tang}\,\varphi + k. \tag{4}$$

Eliminant n, on obtient q :

$$q = (wh+\rho)\frac{\mathrm{tang}\,\alpha}{\mathrm{tang}\,(\alpha+\varphi)} - k.\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi)}. \tag{5}$$

Dans cette expression, c'est l'angle α du plan EF avec la verticale qui est la variable indépendante.

Si l'on exprime que α doit rendre maximum l'expression (5) de q, on aura l'angle que doit faire avec la verticale la base de plus grande tendance au glissement pour le prisme GH, et la valeur de q correspondante représente la vraie pression horizontale sur l'unité de surface à la profondeur GH $= h$ au-dessous du plan horizontal supérieur du massif.

On simplifiera le calcul en transformant la valeur (5) de q comme il suit :

$$q = (wh+\rho)\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi)} - k.\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$= (wh+\rho)\frac{\sin(2\alpha+\varphi)-\sin\varphi}{\sin(2\alpha+\varphi)+\sin\varphi} - k.\frac{2\cos\varphi}{\sin(2\alpha+\varphi)+\sin\varphi}$$

$$= \frac{(wh+\rho)[\sin(2\alpha+\varphi)-\sin\varphi]-2k\cos\varphi}{\sin(2\alpha+\varphi)\sin\varphi}.$$

L'annulation du coefficient différentiel donne :

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{4\cos(2\alpha+\varphi)[(wh+\rho)\sin\varphi + k\cos\varphi]}{[\sin(2\alpha+\varphi)+\sin\varphi]^2} = 0.$$

Comme le dénominateur ne saurait être infini, le numérateur doit être nul :

$$\cos(2\alpha+\varphi) = 0, \quad \text{ou} \quad 2\alpha+\varphi = \frac{\pi}{2},$$

et

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \tag{6}$$

En substituant cette valeur de α dans (5), on a la vraie pression

horizontale cherchée, appliquée à l'unité superficielle à la profondeur h:

$$q = (wh + \rho)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} - k.\frac{\cos\varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= (wh + \rho)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{7}$$

Il faut maintenant déterminer la pression véritable p qui s'exerce sur l'unité superficielle d'une section quelconque EF, passant par le point H et inclinée sous un angle quelconque α par rapport à la verticale : on aura p au moyen de ses composantes n et s, respectivement normale et parallèle à EF. Les équations (1) et (2) donnent

$$W\sin\alpha + Q\cos\alpha = N,$$
$$W\cos\alpha - Q\sin\alpha = S,$$

ou, en remplaçant W, Q, N, S par leurs valeurs en w, q, n, s et q par son expression (7),

$$n = \cos^2\alpha \left\{(wh + \rho)\left[\operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] - \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\}, \tag{8}$$

$$s = \sin\alpha\cos\alpha\left\{(wh + \rho)\left[1 - \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] + \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\}. \tag{9}$$

On a ensuite

$$p = \sqrt{n^2 + s^2}, \tag{10}$$

et l'angle ψ, que fait avec la normale au plan EF la pression p qui s'exerce sur ce plan, est donné par

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{s}{n}. \tag{11}$$

§ 69. Cas particuliers.

L'équation (9) montre que, dans le cas d'une section verticale ou horizontale ($\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$), la composante s de la pression p s'annule, et la pression devient normale ; l'équation (8) en donne la valeur qui, dans le cas de $\alpha = 0$, coïncide avec la valeur q donnée par (7), et qui, dans le cas de $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$p = n = wh + \rho,$$

puisque

$$\tang^2\alpha \cos^2\alpha = \sin^2\alpha = 1, \quad \text{et que} \quad \cos^2\alpha = 0.$$

Si le massif était dépourvu de cohésion, mais non de frottement, on poserait $k = 0$, et la valeur de q se réduirait à

$$q = (wh + \rho) \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

C'est ce qu'on admet ordinairement dans la pratique quand on considère les terres *sèches*. Cela ne change rien d'ailleurs à l'angle sous lequel le prisme GH a la plus grande tendance au glissement.

Si le massif était dépourvu de frottement, mais non de cohésion (cas des *fluides visqueux*), on aurait $\varphi = 0$: cela donne pour l'angle α du maximum de tendance au glissement la valeur $\alpha = \frac{\pi}{4}$, et pour la pression horizontale sur l'unité de surface à la profondeur h au-dessous du niveau supérieur :

$$q = wh + \rho - 2k.$$

Si enfin l'on n'avait ni frottement ni cohésion, φ et k seraient nuls en même temps : c'est le cas de la fluidité parfaite. Dans ce cas non-seulement φ et k disparaissent de l'expression (5) de q, mais α disparaît aussi de cette équation : d'où il résulte que le prisme GH possède une égale tendance au glissement pour toutes les inclinaisons de sa base. L'équation (9) donne $s = 0$, d'où il résulte que sous toutes les inclinaisons la pression est normale à la section sur laquelle

elle s'exerce, et les équations (7), (8), (10) donnent pour l'expression de cette pression

$$q = p = wh + \rho.$$

C'est la loi connue de l'hydrostatique.

§ 70. Pression résultante sur une surface verticale de figure donnée.

Connaissant la pression horizontale q à la profondeur h au-dessous du terre-plein du massif, on peut obtenir sans difficulté la pression résultante Q sur une aire quelconque située dans un plan vertical. Soient x et z les coordonnées horizontale et verticale d'un élément de cette surface, en comptant z de haut en bas à partir du terre-plein. On aura, en se reportant à l'équation (7), pour un élément $dx\,dz$, la pression

$$dQ = qdxdz = dxdz.\left[\left(wz + \rho\right)\tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right];$$

de sorte que la pression résultante sur l'aire donnée

$$Q = \int\int dxdz.\left[\left(wz + \rho\right)\tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right], \quad (12)$$

les intégrales étant prises entre les limites qui résultent du contour de l'aire donnée.

Soit M le moment de cette pression par rapport à l'axe horizontal d'intersection du plan vertical de la figure et du terre-plein ;

$$dM = zdQ = z.q.dxdz,$$

d'où

$$M = \int\int zdxdz.\left[\left(wz + \rho\right)\tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k\cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right], \quad (13)$$

les intégrales étant prises entre les mêmes limites que ci-dessus.

La profondeur verticale Z du point d'application de la poussée Q, ı-dessous du terre-plein, sera

$$Z = \frac{M}{Q}. \tag{14}$$

Comme cas particulier, supposons que la figure donnée soit un ectangle vertical de base horizontale a et de hauteur b ; soit c la pro- ɔndeur de son côté supérieur au-dessous du terre-plein ; et appelons ı l'aire ab du rectangle. Les équations (12) et (13) deviennent, tous ılculs faits :

$$= \frac{1}{2}(b + 2c)\,Aw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + A\left[\rho \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k \cos\varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right],$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + 3bc + 3c^2)\,Aw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(b + 2c)\,A\left[\rho \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k \cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right].$$

Si le côté supérieur du rectangle est au niveau du terre-plein, $= 0$, alors

$$= \frac{1}{2} bAw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + A\left[\rho \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k \cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right], \tag{15}$$

$$= \frac{1}{3} b^2 Aw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} bA\left[\rho \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k \cos\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right], \tag{16}$$

$$= \frac{2}{3} b \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}\rho \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - k \cos\varphi}{bw \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2\left[\rho \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - k \cos\varphi\right]} \right\}. \tag{17}$$

Si le massif n'a pas de cohésion, et qu'on néglige la pression atmo- ɔhérique qui agit sur la surface supérieure, les trois formules (15), 6), (17) prennent les expressions simples, usitées dans la pratique :

$$Q = \frac{1}{2} bAw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{18}$$

$$M = \frac{1}{3} b^2 Aw \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{19}$$

$$Z = \frac{2}{3} b. \tag{20}$$

§ 70 *a*. Délimitation des cas auxquels s'appliquent les formules précédentes.

Les recherches qui précèdent avaient pour objet la loi du développement de la pression aux différents points d'un massif de terre et dans toutes les directions autour d'un même point ; nous avons admis, pour cela, que le massif soit couronné par un terre-plein horizontal, repose sur un plan horizontal fixe, et se prolonge indéfiniment, ou du moins très-loin, dans toutes les directions horizontales. La pression donnée par la formule (12) se rapporte donc seulement au cas d'une figure verticale fictive, que l'on suppose placée dans une section verticale mathématique du massif. Mais on reconnaît facilement que la même formule peut servir à calculer la pression horizontale sur la même figure, dans le cas où l'on suppose le massif limité dans le plan de cette figure par un mur vertical fixe, à parement *absolument lisse*, de sorte qu'il ne puisse se produire ni frottement ni cohésion entre lui et le terrain, et qu'ainsi la figure ne puisse fournir de résistance à la pression des terres que dans le sens normal, par conséquent ici horizontalement.

S'il existe un frottement ou une cohésion entre le parement du mur et le terrain qui le touche, les lois que nous avons trouvées pour la répartition de la pression dans l'intérieur de la masse de terre seront complétement changées. Si aucune pression extérieure n'agit sur le mur, celui-ci devra opposer à la pression des terres une résistance dont l'intensité soit la moindre qui permette l'équilibre; il faut donc, sur tous les points du mur, mettre en jeu la cohésion et le frottement, et incliner sur l'horizon les résistances élémentaires. Dans le calcul de la poussée des terres appuyées contre des murs fixes, on a jusqu'ici négligé cette circonstance, mais à tort, car elle exerce une influence considérable sur le développement et la répartition de la pression dans le massif du terrain jusqu'à une grande distance dans son intérieur ; à mesure qu'on s'éloigne du mur, cette influence s'affaiblit naturellement, mais, mathématiquement parlant, elle se fait sentir à une distance indéfinie.

Ainsi, pour une paroi verticale, on ne peut supposer un parement rugueux sans que les formules précédentes se modifient ; de même

ces formules ne seront plus applicables, si l'on suppose le massif appuyé contre un parement *incliné*, rugueux ou lisse; et l'on ne saurait plus tirer parti des formules (8), (9), (10), (11), qui déterminent la pression sur une surface inclinée fictivement placée dans le massif.

Aux conditions posées au début comme les conditions géométriques du massif considéré, il n'est permis d'apporter qu'une seule modification, savoir : la limitation du massif par un mur vertical absolument lisse et non susceptible de cohésion avec le terrain situé derrière. Tout autre changement détruit les lois simples développées ci-dessus. Tant que le principe général de la vraie répartition de la pression dans un massif à limites quelconques n'aura pas été trouvé, il faut bien apprendre à se servir de la méthode qu'ont suivie jusqu'ici la plupart des auteurs qui ont traité de l'équilibre des terres. Ces auteurs se sont proposé d'ailleurs presque exclusivement pour but de découvrir la pression résultant d'un massif de terre sur une paroi plane; ils ne se sont nullement préoccupés de la répartition des pressions dans l'intérieur du massif.

§ 71. Prisme de terre de plus grande poussée.

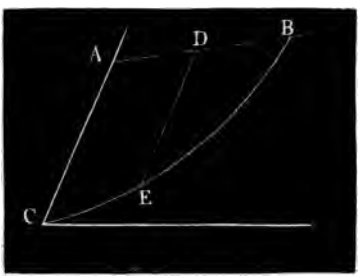
Pour déterminer la pression d'un massif de terre contre une paroi plane, on cherche la portion de ce massif qui, en glissant sur sa base, exercerait la plus grande pression contre la paroi. Cette portion du massif se nomme *prisme de plus grande poussée*. Mais on admet expressément que la face inférieure de ce prisme, sur laquelle il tend à glisser, est dans un plan. On n'accompagne cette hypothèse d'aucune preuve, et il est au contraire vraisemblable que la face de glissement du prisme de plus grande poussée n'est pas plane, mais courbe; il s'ensuit que les formules déduites de cette hypothèse ne peuvent conduire qu'à des approximations qui d'ailleurs, dans la plupart des cas, paraissent peu s'écarter de la vérité.

Deux auteurs, à ma connaissance, *Hagen* et *Persy*, démontrent que la surface de glissement des terres est un plan lorsque le massif s'appuie contre un mur plan et que le terre-plein supérieur est plan. La démonstration suivante, donnée par Hagen (*Manuel des con-*

structions hydrauliques, 2e partie, p. 13), donne lieu à des objections sérieuses :

« La pression qu'exerce le prisme ACB (fig. 124) en se détachant sur la paroi AC, normalement à cette paroi, se compose des pressions qu'exercent dans cette direction les divers éléments du prisme ; les pressions de toutes les parties qui ne sont pas en contact immédiat avec la paroi se transmettent sans affaiblissement au travers du massif intermédiaire, attendu qu'après le premier mouvement le prisme tout entier demeure compact et se comporte dès lors comme un corps solide invariable. Considérons un plan de section DE, parallèle à la paroi AC ; la pression totale sur AC sera la somme des pressions des deux prismes ACED et DEB. Laissant constante la première partie qui est déterminée par la courbure de CE, on peut considérer la seconde partie comme variable et chercher suivant quelle direction la ligne de glissement doit s'élever à partir du point E. On se retrouve dans le cas où la pression normale contre une paroi doit être maximum ; la pression du petit prisme dans cette même direction contre DE doit donc être un maximum ; or (en faisant abstraction de la cohésion), il est facile de se convaincre que la section du petit prisme DEB doit être semblable à celle du grand prisme ACB, pour que le premier corresponde comme le second à un maximum de la poussée. Une telle similitude entre ces deux figures ne peut exister pour toute position du point E qu'autant que CEB est une ligne droite : donc la face de glissement est plane. »

Fig. 124.



Il serait trop long de contrôler en détail toutes les assertions et les déductions de ce raisonnement. Qu'il suffise de remarquer que l'on admet implicitement, et sans démonstration aucune, que pendant la variation du prisme postérieur DEB le prisme antérieur restera constant, et qu'ainsi la pression exercée par ce dernier sur AC est complétement indépendante de la pression provenant du prisme postérieur.

Or, on ne peut admettre cette hypothèse même comme vraisemblable, car la nature du système en équilibre y résiste. Il serait en effet bien plus naturel de supposer que la direction de la face de

glissement dans le segment *postérieur* soit indépendante de la direction de cette même surface dans le segment *antérieur* et qu'elle ait dans la partie la plus élevée, à partir de B, une inclinaison donnée, à laquelle se raccordera, suivant une loi à découvrir, la direction de la partie inférieure. Dans ce cas, la figure de la face de glissement entre les points B et E resterait la même, étant donnés l'angle du terre-plein AB et la direction du mur AC, quelle que fût la position de ce mur en DE ou en AC. Dans cet ordre d'idées assurément admissible, où la face de glissement serait formée, suivant les cas, d'une partie plus ou moins longue d'une même courbe commençant en B, la condition de similitude entre les parties BE, BC n'existe plus, et ainsi tombe le raisonnement cité plus haut.

La démonstration de Persy (cours de stabilité des constructions, lithographie de l'école d'application à Metz) est aussi inadmissible, comme je l'ai prouvé dans le mémoire sur la pression dans l'intérieur d'un massif de terre, inséré dans le *Journal de construction* de Crelle, t. XXX.

Mais on peut démontrer rigoureusement que la surface de glissement du prisme de plus grande poussée est plane dans le cas particulier traité précédemment, où le terre-plein et la base d'appui d'un massif sont horizontaux et le mur de soutènement vertical et à parement lisse. Cette démonstration, qui offre une application intéressante du calcul des variations, se trouve dans le mémoire cité en dernier lieu. Je ne la reproduis pas ici, parce que les formules du paragraphe 70 ont déjà permis d'évaluer toutes les pressions cherchées sans la considération du prisme de plus grande poussée.

L'équation (18) prouve qu'en négligeant la cohésion et la pression atmosphérique agissant sur le terre-plein supérieur, la surface de glissement de ce prisme de plus grande poussée fait un angle $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ avec la verticale.

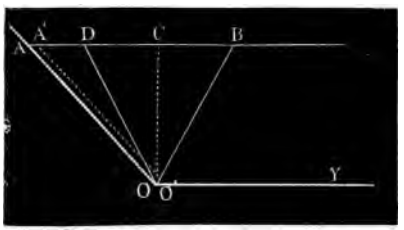
§ 72. Evaluation de la poussée contre une paroi qui n'est pas parfaitement lisse.

Si l'on demande, comme exercice, à défaut d'hypothèses suffisantes, une estimation approximative de la pression qu'exerce un massif de terre arasé horizontalement sur une paroi AO (fig. 125)

oblique et rugueuse, on devra considérer la face de glissement OB, qui passe par le point inférieur de la paroi, comme étant plane. Avant de commencer le calcul, nous établirons d'abord quelques principes, en supposant, pour plus de simplicité, que du terrain au terrain et du terrain au mur il n'y a que frottement, et non cohésion.

Si la paroi OA est à droite de la verticale OC, et que son angle aigu AOY sur l'horizon soit plus petit que l'angle du frottement φ qui répond à un glissement de terre sur terre, le mur ne supporte aucune pression; en effet, dans chaque prisme tel que AOB, la capacité de frottement de la section OB suffit pour empêcher tout glissement. Cela suppose toutefois que la base OY sur laquelle le terrain repose est assez rugueuse, sans quoi, ainsi qu'on le verra plus loin, il y aurait pression sur AO, malgré la petitesse de l'angle AOY.

Fig. 125.



Si l'angle AOY est aigu, mais plus grand que φ, ou s'il est obtus, les prismes tels que AOB ne peuvent être maintenus en équilibre que par la résistance du mur AO. D'après le principe de la moindre résistance, il faut considérer la moindre résistance horizontale de la paroi AO capable de maintenir le prisme donné : les résistances fournies par les surfaces OB et OA devront donc être aussi rapprochées que possible de la position verticale; elles feront donc avec les normales à OB et OA les angles φ et φ' respectifs du frottement de terre sur terre et de terre sur mur. Il s'ensuit évidemment que BOY doit être plus grand que φ, et AOY plus petit que $180° - \varphi'$, sans quoi les résistances correspondantes seraient dirigées verticalement.

Il est important ici de remarquer que l'angle du frottement φ' de la terre sur le mur OA ne doit être pris qu'inférieur ou tout au plus égal à l'angle de frottement φ de terre sur terre; si φ' était plus grand que φ, la paroi OA ne pourrait résister que dans une direction faisant avec la normale un angle au plus égal à φ. Supposons en effet qu'on découpe la tranche infiniment mince AOO'A', parallèle à la face OA : on aura la direction de la pression sur OA

en composant la résistance de la paroi O'A' avec le poids de la tranche AOO'A'. Or, ce poids est infiniment petit; la direction de la pression sur O'A' ne peut donc différer qu'infiniment peu de la direction de la pression sur OA. Mais la pression sur O'A', qui est noyé dans le massif, ne peut faire avec la normale un angle plus grand que φ; donc l'angle de la réaction de la paroi OA avec cette normale ne peut non plus dépasser φ.

Dans l'application, l'angle de frottement φ' est ordinairement plus grand que φ. Aussi ne s'occupe-t-on pas du premier et le remplace-t-on par φ, comme si OA était une section noyée en plein massif de terre.

La méthode que nous venons de décrire pour déterminer les résistances des faces OB, OA, est conforme au principe de la moindre résistance et donne la moindre valeur de la pression horizontale qui puisse arrêter le glissement du massif AOB, considéré comme un solide invariable. Si maintenant on fait varier la direction de la face OB, il faut que le mur soit capable de résister à la plus grande poussée horizontale d'un prisme tel que AOB; c'est cette poussée maximum que l'on considère ordinairement comme la vraie pression horizontale sur le mur OA. Il y a cependant une restriction à apporter à cette proposition, qui serait tout à fait exacte si chaque prisme AOB se comportait de tout point comme un solide invariable. C'est ce qui n'a pas lieu en réalité, et il est bon de ne pas perdre de vue cette observation dans la poursuite de notre problème et de chercher si cette proposition ne s'éloigne pas sensiblement de la vérité dans certaines limites d'inclinaison de la paroi OA.

Ne pouvant pénétrer plus avant dans la constitution du massif, nous nous contenterons de considérer le massif comme divisible par secteurs rayonnant autour du point O. Mais nous devons alors nous demander si le maintien d'un prisme tel que DOB, appuyé sur le massif de terre par ses deux faces, ne peut pas exiger une poussée horizontale plus grande que le maintien d'un prisme tel que AOB appuyé d'un côté contre la terre, de l'autre sur la paroi solide OA.

S'il en était ainsi, le prisme de la première classe, tel que DOB, qui exigerait le plus grand effort horizontal, donnerait lieu à la vraie poussée horizontale sur la paroi OA, et l'on aurait la pression résultante sur cette paroi en composant la pression résultante sur OD avec le poids du massif DOA.

Soit un prisme DOB déterminé par les angles COD$=\alpha'$, COB$=\alpha$;

que l'on développe les conditions d'équilibre de ce prisme, en exprimant que les réactions des faces OB, OD, font avec les normales respectives un angle égal à φ, on verra que la pression horizontale de ce prisme est une fonction symétrique des deux variables α, α', et que la condition du maximum de cette poussée est remplie quand $\alpha = \alpha'$. Mais si cette égalité a lieu, il est clair que, dans la section verticale OC du prisme DOB qui est symétrique quant à la figure et quant aux forces, il ne peut régner qu'une pression horizontale, laquelle sera égale à la poussée horizontale du prisme DOB. D'où il suit, en se reportant au calcul antérieur de la plus grande poussée sur une paroi verticale polie supportant une pression horizontale, que l'on déterminera le prisme DOB de plus grande poussée horizontale en posant $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$,

et ainsi $$\text{DOB} = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

On déduit de ces considérations les conséquence suivantes :

Si l'angle AOC que fait la paroi AO avec la verticale est à droite de cette verticale, ou, étant à gauche, est plus petit que $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, on doit considérer la face OA comme l'une des faces du prisme AOB de plus grande poussée. On doit ici prendre pour angle de la résistance de la paroi OA avec la normale à OA l'angle φ' si $\varphi' < \varphi$, et l'angle φ, si $\varphi' = \varphi$ ou si $\varphi' > \varphi$.

Soient, dans le cas considéré,

α' l'angle COA,

α l'angle COB,

φ' l'angle de frottement pour le glissement de la terre sur la paroi OA,

φ l'angle de frottement pour le glissement de la terre sur elle-même,

H la hauteur OC,

w le poids spécifique de la terre,

P la résistance totale de la paroi OA sur l'unité de longueur perpendiculairement au plan AOY,

Q, R les composantes horizontale et verticale de cette résistance.

On trouve facilement :

$$Q=\frac{1}{2}w.H^2\frac{\cos(\varphi'\pm\alpha')\cos(\varphi+\alpha)(\tang\alpha\pm\tang\alpha')}{\sin(\varphi+\varphi'+\alpha\pm\alpha')}, \tag{21}$$

$$R=Q\tang(\varphi'\pm\alpha')=\frac{1}{2}w.H^2\frac{\sin(\varphi'\pm\alpha')\cos(\varphi+\alpha)(\tang\alpha\pm\tang\alpha')}{\sin(\varphi+\varphi'+\alpha\pm\alpha')}, \tag{22}$$

$$P=\frac{Q}{\cos(\varphi'\pm\alpha')}=\frac{1}{2}w.H^2\frac{\cos(\varphi+\alpha)\ \tang\alpha\pm\tang\alpha')}{\varphi+\varphi'+\alpha\pm\alpha')}, \tag{23}$$

expressions où l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que l'angle COD $=\alpha'$ est à gauche ou à droite de la verticale OC.

Egalons à zéro le coefficient différentiel de Q par rapport à α, et résolvons l'équation par rapport à α, angle de la verticale avec le plan de rupture OB qui limite le prisme de plus grande poussée. Il vient :

$$\tang\alpha=-\tang(\varphi+\varphi'\pm\alpha')$$
$$+\sqrt{[\tang(\varphi+\varphi'\pm\alpha')\mp\tang\alpha'][\tang(\varphi+\varphi'\pm\alpha')+\cot\varphi]}. \tag{24}$$

On tire ensuite de (21) la vraie pression horizontale Q sur la paroi fixe OA :

$$Q=\frac{1}{2}w.H^2\frac{\sin\varphi\cos(\varphi'\pm\alpha')}{\cos^2(\varphi+\varphi'\pm\alpha')}\left\{\sqrt{\frac{\cos(\varphi'\pm\alpha')}{\sin\varphi}}-\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\cos\alpha}}\right\}^2. \tag{25}$$

Enfin la composante verticale R, qui avec Q produit la résistance P de la face OA :

$$R=\frac{1}{2}w.H^2\frac{\sin\varphi\sin(\varphi'\pm\alpha')}{\cos^2(\varphi-\varphi'\pm\alpha')}\left\{\sqrt{\frac{\cos(\varphi'\pm\alpha')}{\sin\varphi}}-\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\cos\alpha'}}\right\}^2. \tag{26}$$

Dans les trois dernières équations, on prendra les signes supérieurs ou les signes inférieurs, selon que l'on sera dans le premier ou dans le second cas relatif à l'angle α'.

Les deux figures 126 et 127 indiquent la construction géométrique très-simple de l'angle COB $=\alpha$ que fait avec la verticale la base du prisme de plus grande poussée, déterminé par l'équation (24). Pre-

ou
$$Q = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin \varphi \sin (\beta + \varphi)}{\cos \beta}}\right)^2}.$$

En ce qui concerne le point d'application G de cette pression, on répéterait le calcul précédent pour une partie quelconque de la hauteur BD comptée à partir de B, et l'on aurait une formule semblable à l'équation (36), sauf le remplacement de H par la hauteur z choisie au-dessous de B. La différentiation donnera la poussée élémentaire dQ sur une partie dz; puis la somme des moments de ces poussées élémentaires par rapport au point B, divisée par la valeur (36) de la résultante Q, donnera la distance du point d'application G de la résultante au point B :

$$BG = \frac{2}{3} H.$$

Considérant maintenant l'ensemble du demi-massif ABD, on voit qu'il est sollicité par trois forces :

1° La poussée horizontale Q de la partie CBD, agissant à une hauteur $BG = \frac{2}{3} H$ au-dessous de B;

2° Le poids $W = \frac{1}{2} w . \frac{H^2}{\text{tang } \beta}$ de la masse ABD, dont la direction WL passe par le centre de gravité du triangle ABD, par conséquent à une distance du point D

$$DL = \frac{1}{3} DA = \frac{\frac{1}{3} H}{\text{tang } \beta};$$

3° La résistance P de la base AD, agissant dans une direction PK qu'il nous reste à déterminer; nous désignerons par ψ l'angle PKN qu'elle fait avec la ligne KN normale à AD.

Ces trois forces doivent se faire équilibre; donc la résistance P de la base AD doit être dirigée suivant la diagonale IH du parallélogramme WHQI, dont les côtés QH et WH représentent, tant en grandeur qu'en direction, les deux forces Q et W. De plus, P représente la grandeur de la résultante de Q et W. On aura donc, eu égard aux valeurs précédemment calculées de Q et W :

$$\text{tang } \psi = \frac{Q}{W} = \text{tang } \beta \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sin \varphi \sqrt{1 + \frac{\text{tang } \beta}{\text{tang } \varphi}}\right)^2}. \qquad (37)$$

Soit φ' l'angle de frottement entre la terre et la base AD; pour le maintien de l'équilibre du massif établi sous le talus BAC=BCA=β, il faut que φ' soit plus grand que ψ ou au moins égal à ψ; d'où

$$\operatorname{tang}\varphi' \geqq \operatorname{tang}\beta \frac{\cos^2\varphi}{\left(1+\sin\varphi\sqrt{1+\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\varphi}}\right)^2} \tag{38}$$

Si l'on suppose le talus β égal à l'angle φ du frottement dans le massif, on a, d'après (37),

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\sin 2\varphi}{16\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\varphi}{2}\right)}, \tag{39}$$

et la condition d'équilibre devient

$$\operatorname{tang}\varphi' \geqq \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2}, \quad \text{ou} \quad \geqq \frac{\sin 2\varphi}{16\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\varphi}{2}\right)}. \tag{40}$$

Par exemple, pour qu'un massif dont l'angle de frottement serait 45° pût se tenir en équilibre sous un talus égal à cet angle, il faudrait que la tangente de l'angle φ' du frottement du massif sur sa base fût au plus égale à $\frac{1}{8}$, et par suite l'angle φ' au plus égal à 7°+7′+20″.

Si au contraire φ' est plus petit que ψ, le terrain ne peut développer sous le talus β l'angle limite de frottement φ' avec la base; la valeur du vrai talus de stabilité se déduira alors de (37), en y remplaçant ψ par φ'. On en tire

$$\operatorname{tang}\beta = -\operatorname{tang}\varphi + \frac{\left[\sin\varphi'\sqrt{\operatorname{tang}\varphi} + \sqrt{\cos\varphi\cos\varphi'\sin(\varphi+\varphi')}\right]^2}{\cos^2(\varphi+\varphi')}. \tag{41}$$

Il va de soi que l'angle β ne peut jamais dépasser l'angle du frottement φ; si donc la formule ci-dessus donnait $\beta > \varphi$, on prendrait pour la valeur vraie du premier angle l'angle φ lui-même.

Si l'on applique la formule (41), par exemple, à un terrain dont l'angle du frottement φ=45°, mais dont l'angle de frottement sur sa base AC, φ'=5° seulement, on trouve que le talus d'équilibre β ne saurait dépasser une valeur de 32°+15′ environ.

nons OC = 1 ; faisons à gauche de la paroi OA l'angle AOE $= \varphi + \varphi'$; alors l'angle COE $= \varphi + \varphi' \pm \alpha'$, donc

$$EA = \text{tang}\,(\varphi + \varphi' \pm \alpha') \mp \text{tang}\,\alpha.$$

Si l'on fait, d'autre part, l'angle FOY $= \varphi$, on a

$$CF = \cot\varphi \text{ et } EF = \text{tang}\,(\varphi + \varphi' \pm \alpha') + \cot\varphi.$$

Décrivons sur EF une demi-circonférence EGF, élevons en A la perpendiculaire AG et faisons EB = EG, nous aurons

$$EB = \sqrt{[\text{tang}\,(\varphi + \varphi' \pm \alpha') \mp \text{tang}\,\alpha'][\text{tang}\,(\varphi + \varphi' \pm \alpha') + \cot\varphi]}.$$

Puis CB = EB — EC = EB — tang $(\varphi + \varphi' \pm \alpha')$ = tang α d'après (24); donc COB $= \alpha$ et OB est la base du prisme de plus grande poussée horizontale.

Fig. 126.

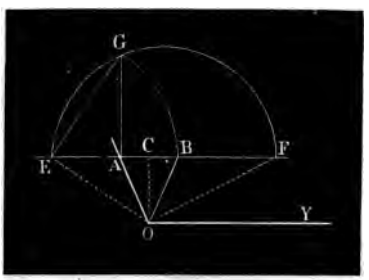
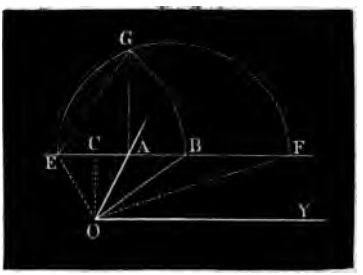


Fig. 127.



Dans le cas où $\varphi' = 0$, ce qui suppose la paroi OA absolument polie et sans frottement, et par suite une résistance P normale à OA, l'équation (24) donne

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi \pm \alpha'}{2}; \tag{27}$$

de sorte que la base OB du prisme de plus grande poussée est la bissectrice de l'angle AOF.

La pression horizontale devient elle-même, dans ce cas, d'après (25)

$$Q = \frac{1}{2}\, w.H^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi \mp \alpha'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi \pm \alpha'}{2}\right)}, \tag{28}$$

et la composante verticale de la résistance P de la paroi OA :

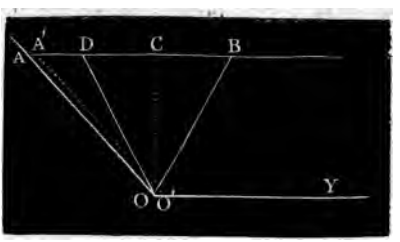
$$R = \pm \frac{1}{2} w.H^2 \operatorname{tang} \alpha' \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi \mp \alpha'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi \pm \alpha'}{2}\right)}. \qquad (29)$$

§ 73. Cas où α' est $> \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et $\varphi' > \varphi$.

Supposons maintenant que l'angle AOC de la verticale OC avec la paroi OA considérée comme fixe et capable de frottement soit situé à gauche de OC et en même temps plus grand que $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, ou que $\frac{1}{2}$ COF; dans ce cas les formules (21) à (26) n'ont plus de valeur. Admettons en outre que l'angle φ' est plus grand que φ, de sorte qu'on doit, d'après les remarques antérieures, le remplacer par φ.

Il y a, dans ce cas, toujours un prisme entièrement entouré de terre, tel que DOB (fig. 128), pour lequel l'angle COD = COB = $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, et qui exerce une poussée horizontale plus grande que n'importe quel prisme tel que AOB, limité d'un côté à la paroi OA.

Fig. 128.



Dans ces circonstances, la poussée horizontale contre OA est indépendante de la valeur de l'angle COA = α'; elle est donnée par la formule (18) :

$$Q = \frac{1}{2} w.H^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (30)$$

Cette expression est la même que celle de la pression horizontale résultante sur la section verticale OC. La composante verticale de la pression sur OA ne peut dès lors différer du poids du massif COA. Ainsi,

$$R = \frac{1}{2} wH^2 \operatorname{tang} \alpha' \qquad (31)$$

Représentons par ψ' l'angle que fait la résistance résultante P de la paroi OA avec la normale à cette paroi, de sorte que $\operatorname{tang}(\alpha'+\psi')=\frac{R}{Q}$; les expressions (30) et (31) donnent alors

$$\operatorname{tang}(\alpha'+\psi')=\frac{\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=\operatorname{tang}\alpha'\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (32)$$

Or, $\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ est positif et >1, donc $\operatorname{tang}\alpha'\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ est toujours plus grand que $\operatorname{tang}\alpha'$; donc $\operatorname{tang}(\alpha'+\psi')$ est toujours $>\operatorname{tang}\alpha'$, et par conséquent ψ' est toujours positif : d'où il suit que la résultante P est toujours dirigée au-dessous, jamais au-dessus de la normale à OA; ainsi le massif ne pourra jamais glisser de bas en haut dans la direction OA.

De (32) il résulte de plus que ψ' est toujours plus petit que φ, de sorte que la capacité de résistance du mur OA n'entre jamais tout entière en action, si elle est supérieure à la capacité de résistance d'une section prise dans le massif.

Ce fait, $\psi'<\varphi$ se déduit de (32) comme il suit. Il suffit pour cela de vérifier l'inégalité

$$\operatorname{tang}(\alpha'+\varphi)>\operatorname{tang}(\alpha'+\psi'),$$

ou (32)
$$\operatorname{tang}(\alpha'+\varphi)>\operatorname{tang}\alpha'\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou
$$\frac{\operatorname{tang}(\alpha'+\varphi)}{\operatorname{tang}\alpha'}>\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Posons $\alpha'=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\delta$. Il faut vérifier

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\delta\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\delta\right)}>\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou
$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\delta\right)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}-\delta\right)>\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

ce qui a lieu généralement, car on peut ramener cette inégalité à celle-ci, qui est vérifiée :

$$-1>-\operatorname{tang}^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

§ 74. Cas où α est $>\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, et $\varphi'<\varphi$.

Enfin, en conservant l'hypothèse $\alpha'>\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, supposons que la faculté de frottement de la paroi OA soit inférieure à celle des terres dans l'intérieur du massif : ainsi φ' est $<\varphi$. Dans ce cas, les formules (30) et (31) sont encore applicables pour toutes les valeurs de $AOC=\alpha'$ qui sont assez grandes pour que l'équation (32) donne $\psi'<\varphi'$. Pour toutes les valeurs de α' inférieures, et pour lesquelles on rencontrerait la condition impossible $\psi'>\varphi'$, on doit recourir aux formules (24), (25), (26); la résistance du mur OA fait avec la normale à ce mur l'angle φ', et la valeur de la pression horizontale Q donnée par (25) est plus grande que celle qu'eût donnée (30). Pour les valeurs de α' supérieures à la limite, on emploie (30), (31), (32); la résistance de OA fait avec la normale l'angle ψ', et la valeur de la poussée horizontale Q donnée par (30) est plus grande que celle qu'on aurait tirée de (25).

Cette valeur limite de α', que nous désignerons par β', se déduira de (32) en y faisant $\alpha'=\beta'$ et $\psi'=\varphi'$ et résolvant l'équation par rapport à β'. On a

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta'+\varphi')}{\operatorname{tang}\beta'}=\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)},$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\beta'+\frac{\varphi'}{2}+\frac{\varphi'}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\beta'+\frac{\varphi'}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)};$$

d'où enfin l'expression simple

$$\sin(2\beta'+\varphi')=\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}. \tag{33}$$

Pour $\varphi'=\varphi$ on a $\beta'=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut. Pour $\varphi'=0$, $\beta'=\frac{\pi}{2}$. On voit aussi que, dans le cas d'un

mur OA absolument poli, les équations (27), (28), (29), déduites des formules (24), (25), (26), sont applicables, quelle que soit l'inclinaison de la paroi résistante OA.

§ 75. Résumé des résultats précédents.

Tout ce qui précède peut se résumer ainsi : 1° pour toute valeur de l'angle de frottement φ', on doit appliquer les formules (24), (25), (26), tant que l'angle α' ne dépasse pas la valeur β' donnée par (33); on doit d'ailleurs avoir soin de mettre dans les formules φ à la place de φ' toutes les fois que $\varphi' > \varphi$.

2° Quand l'angle α' dépasse β', on doit appliquer les formules (30), (31), (32).

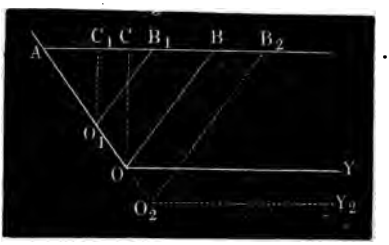
3° Pour un mur à parois parfaitement polies, où $\varphi = 0$, on applique toujours les formules (24), (25), (26), ou les formules (27), (28), (29) qui s'en déduisent; dans ce cas, en effet, l'angle α' ne saurait dépasser sa limite β'.

L'analyse qui nous a conduit à la détermination de la plus grande poussée horizontale contre une paroi oblique et capable de frottement complète utilement les théories précédentes sur cette matière; notre théorie ne présente pas la contradiction suivante qui régnait dans le cas de COA ou $\alpha' > \frac{\pi}{2} - \varphi'$, d'après les explications antérieures et les formules (24), (25), (26), qui s'en déduisent. Ces formules indiquent en effet que la réaction résultante P du mur OA est située à gauche de la verticale de son point d'application, d'où résulte pour la poussée du massif une composante horizontale non dans le sens YO, mais dans le sens OY. Supposons maintenant que, pour cette même direction de la paroi OA, elle ait à résister dans le sens vertical de bas en haut, ce dont elle est évidemment capable : il faudrait pour cela que la résistance d'une section quelconque, telle que OB, fût pareillement verticale (comme on le voit en exprimant l'équilibre du prisme AOB). Or, cette dernière condition ne saurait être remplie pour les positions très-inclinées du plan OB; et, fût-elle remplie, on manquerait des éléments nécessaires pour déterminer la pression verticale résultante sur OA.

§ 76. Point d'application de la poussée des terres contre une surface de figure donnée.

Nous avons recherché jusqu'ici la grandeur de la résistance du mur AO et ses composantes horizontale et verticale, mais non son point d'application. Si l'on admet comme certain que toute partie de la surface AO (fig. 129) partant de A, comme par exemple AO_1, se trouve dans les mêmes conditions de pression que la paroi entière, de sorte que cette pression sur AO_1 s'obtient en introduisant dans les formules précédentes $C_1O_1 = H_1$ au lieu de $CO = H$: on trouve alors sans difficulté que le point d'application de la résultante est aux deux tiers de la hauteur au-dessous de la surface libre, comme dans le cas des fluides parfaits; ce point est donc distant du point A d'une quantité égale à $\frac{2}{3}.OA$.

Fig. 129.

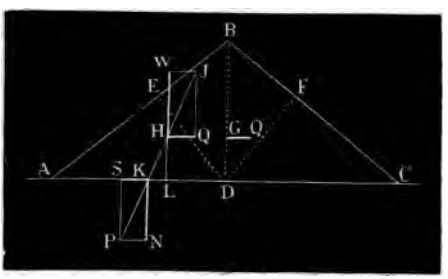


On a, il est vrai, élevé des objections contre l'assimilation des modes d'action des terres contre AO_1 et contre le mur entier AO; mais il est facile d'y répondre. On ne changera pas en effet les forces appliquées au prisme AOB, si l'on suppose que le plan d'appui OY du massif soit transporté en O_2Y_2, que le mur AO se prolonge jusqu'en O_2, et que la figure YOO_2Y_2 soit remplie de matière identique à celle du massif. D'après les principes précédents, il se développera derrière la paroi AO_2 un prisme de plus grande poussée AO_2B_2 semblable à AOB : en composant la poussée sur O_2B_2 avec le poids de la masse B_2O_2OB, et avec la différence des réactions des parois AO_2 et AO (soit la réaction de la partie O_2O), on retrouve bien la poussée sur OB, déterminée précédemment; l'existence du prisme AO_2B_2 est donc parfaitement compatible avec celle du premier prisme AOB et des forces qui s'y rapportent. Ce que nous venons de dire de AO par rapport à AO_2 peut être répété pour AO_1 par rapport à AO.

§ 77. Relation entre l'angle du frottement et le talus de roideur limite.

Pour de plus amples développements de la théorie de la poussée des terres, je renvoie aux ouvrages connus de *Navier* et d'autres auteurs, et particulièrement à celui de Moseley (*les Principes mécaniques du génie civil et de l'architecture*). Je vais ajouter néanmoins quelques remarques relatives à l'angle du frottement φ d'un massif. Si l'on fait abstraction du coefficient de cohésion k du massif et de la pression atmosphérique extérieure ρ, il est vrai de dire que l'angle φ d'inclinaison de la résistance de deux plans, frottant l'un sur l'autre, avec la normale à ces plans, est en même temps le talus de roideur limite, ou le plus grand angle que puisse faire avec l'horizon la surface libre du massif, supposé en équilibre. Il est naturel de penser que si l'on répand de la terre sur une base fixe, sous un angle plus roide, et qu'on abandonne cette terre librement à l'action de la pesanteur, ce talus-limite se produira de lui-même : toutefois ceci n'est pas exact sans restriction ; la possibilité de cette égalité entre l'angle du frottement et le talus *naturel* des terres dépend des dispositions physiques de la base d'appui, et dans certaines circonstances le talus naturel se trouve nécessairement plus petit que l'angle du frottement.

Fig. 130.



Soit un massif de terre compris entre deux plans verticaux parallèles, appuyé sur un plan horizontal fixe AC (fig. 130), et offrant, parallèlement aux plans verticaux limites, une section constante en forme de triangle isocèle ABC, où l'angle BAC = BCA = β.

Il est clair que dans la section verticale BD, qui divise symétriquement le massif, il ne peut se produire qu'une poussée normale, par conséquent horizontale ; or il n'existe aucune paroi d'appui parallèle à BD, pouvant s'opposer à cette poussée : cette force ne peut

donc être combattue que par le frottement qui s'exerce sur les surfaces horizontales DA, DC. Si donc la surface d'appui AC est absolument polie et ne peut développer de frottement, il est alors impossible que le massif incliné ABC se tienne en équilibre ; la terre, jetée de manière à affecter cette figure à l'origine, se répandra en une tranche horizontale infiniment mince, à la manière d'un liquide parfait. Si la surface AC est rugueuse et que sa faculté de frottement dépasse une certaine limite, la terre qui s'y appuie pourra prendre un talus β égal à l'angle de frottement φ, qui est son maximum. Pour une surface d'appui moins rugueuse, l'angle du talus-limite $BAC = BCA = \beta$ que peut faire le massif avec sa base est dans une certaine relation de grandeur avec l'angle du frottement φ de terre sur terre, et avec l'angle φ' de frottement du terrain sur la base AC. C'est cette relation que nous nous proposons de trouver.

Nous admettrons pour cela une hypothèse non démontrée, mais qui ne s'éloigne sûrement pas beaucoup de la vérité : la partie BED du massif BAD, laquelle a la tendance maximum au glissement sur sa base ED, est un prisme de rupture plane suivant ED. Cela admis, représentons par α l'angle BDE, la hauteur BD par H, et par Q la pression horizontale qu'exerce contre BD le massif BED, considéré comme ayant l'unité de largeur perpendiculairement au plan ABC; négligeons la cohésion de la terre et la pression atmosphérique extérieure : en remarquant que la face ED résiste dans une direction inclinée de l'angle φ sur la normale, on trouve l'expression

$$Q = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang}(\alpha+\varphi)(1+\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta)} = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\operatorname{tang}(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\beta)}. \quad (34)$$

Egalant à zéro le coefficient différentiel de Q par rapport à α pour déterminer le maximum de Q et la valeur correspondante de α, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + \sqrt{1+\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\varphi}}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + \sqrt{\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\cos\beta\sin\varphi}}}. \quad (35)$$

Substituant cette valeur de *tang* α dans l'équation précédente, on a la vraie valeur de la pression horizontale qui s'exerce sur la face BD :

$$Q = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\cos^2\varphi}{\left(1+\sin\varphi\sqrt{1+\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\varphi}}\right)^2}. \quad (36)$$

ou
$$Q = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin \varphi \sin (\beta + \varphi)}{\cos \beta}}\right)^2}.$$

En ce qui concerne le point d'application G de cette pression, on répéterait le calcul précédent pour une partie quelconque de la hauteur BD comptée à partir de B, et l'on aurait une formule semblable à l'équation (36), sauf le remplacement de H par la hauteur z choisie au-dessous de B. La différentiation donnera la poussée élémentaire dQ sur une partie dz; puis la somme des moments de ces poussées élémentaires par rapport au point B, divisée par la valeur (36) de la résultante Q, donnera la distance du point d'application G de la résultante au point B :

$$BG = \frac{2}{3} H.$$

Considérant maintenant l'ensemble du demi-massif ABD, on voit qu'il est sollicité par trois forces :

1° La poussée horizontale Q de la partie CBD, agissant à une hauteur $BG = \frac{2}{3} H$ au-dessous de B;

2° Le poids $W = \frac{1}{2} w . \frac{H^2}{\tang \beta}$ de la masse ABD, dont la direction WL passe par le centre de gravité du triangle ABD, par conséquent à une distance du point D

$$DL = \frac{1}{3} DA = \frac{\frac{1}{3} H}{\tang \beta};$$

3° La résistance P de la base AD, agissant dans une direction PK qu'il nous reste à déterminer; nous désignerons par ψ l'angle PKN qu'elle fait avec la ligne KN normale à AD.

Ces trois forces doivent se faire équilibre; donc la résistance P de la base AD doit être dirigée suivant la diagonale IH du parallélogramme WHQI, dont les côtés QH et WH représentent, tant en grandeur qu'en direction, les deux forces Q et W. De plus, P représente la grandeur de la résultante de Q et W. On aura donc, eu égard aux valeurs précédemment calculées de Q et W :

$$\tang \psi = \frac{Q}{W} = \tang \beta \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sin \varphi \sqrt{1 + \frac{\tang \beta}{\tang \varphi}}\right)^2}. \qquad (37)$$

Soit φ' l'angle de frottement entre la terre et la base AD; pour le maintien de l'équilibre du massif établi sous le talus BAC=BCA=β, il faut que φ' soit plus grand que ψ ou au moins égal à ψ; d'où

$$\operatorname{tang}\varphi' \geqq \operatorname{tang}\beta \frac{\cos^2\varphi}{\left(1+\sin\varphi\sqrt{1+\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\varphi}}\right)^2} \tag{38}$$

Si l'on suppose le talus β égal à l'angle φ du frottement dans le massif, on a, d'après (37),

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\sin 2\varphi}{16\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\varphi}{2}\right)}, \tag{39}$$

et la condition d'équilibre devient

$$\operatorname{tang}\varphi' \geqq \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2}, \quad \text{ou} \quad \geqq \frac{\sin 2\varphi}{16\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\varphi}{2}\right)}. \tag{40}$$

Par exemple, pour qu'un massif dont l'angle de frottement serait 45° pût se tenir en équilibre sous un talus égal à cet angle, il faudrait que la tangente de l'angle φ' du frottement du massif sur sa base fût au plus égale à $\frac{1}{8}$, et par suite l'angle φ' au plus égal à 7°+7′+20″.

Si au contraire φ' est plus petit que ψ, le terrain ne peut développer sous le talus β l'angle limite de frottement φ' avec la base; la valeur du vrai talus de stabilité se déduira alors de (37), en y remplaçant ψ par φ'. On en tire

$$\operatorname{tang}\beta = -\operatorname{tang}\varphi + \frac{\left[\sin\varphi'\sqrt{\operatorname{tang}\varphi} + \sqrt{\cos\varphi\cos\varphi'\sin(\varphi+\varphi')}\right]^2}{\cos^2(\varphi+\varphi')}. \tag{41}$$

Il va de soi que l'angle β ne peut jamais dépasser l'angle du frottement φ; si donc la formule ci-dessus donnait $\beta > \varphi$, on prendrait pour la valeur vraie du premier angle l'angle φ lui-même.

Si l'on applique la formule (41), par exemple, à un terrain dont l'angle du frottement φ=45°, mais dont l'angle de frottement sur sa base AC, φ'=5° seulement, on trouve que le talus d'équilibre β ne saurait dépasser une valeur de 32°+15′ environ.

§ 78. Point d'application de la poussée sur la base d'un massif à talus coulant.

La force P qu'oppose la base AD aux forces qui sollicitent la masse ABD rencontre la base en un point K dont la distance au point L, projection horizontale du centre de gravité de ABD, est $LK = \frac{1}{3} H \tang \psi$, sachant que $= LH = DG = \frac{1}{3} H$ et que l'angle $KHL = PKN = \psi$.

La distance du point d'application K au point D est, par suite,

$$DK = DL + LK = \frac{1}{3} H \left(\frac{1}{\tang \beta} + \tang \psi\right).$$

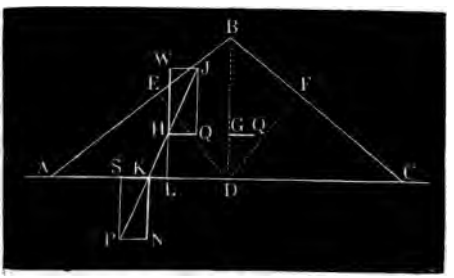
Dans ces deux expressions on introduira la valeur (37) de $\tang \psi$; si la base AB était capable de développer assez de frottement pour que les talus A et C eussent l'inclinaison $\beta = \varphi$, c'est l'expression (39) qui donnerait $\tang \psi$.

Si, dans le massif ABC, il ne se produisait aucune poussée latérale, la faculté de frottement de la base AC n'entrerait pas en jeu; la résultante des forces, agissant sur la masse ABD, passerait par le point L et serait égale au poids W de cette masse; chaque partie de la base AC serait chargée isolément du prisme vertical de terre reposant au-dessus. Mais, par suite de la tension horizontale qui se développe dans cette masse, le point d'application de la résultante P, dont la composante verticale KN demeure égale au poids W, est repoussé à une distance KL : d'où il suit que, dans un tel massif, les parties de la base plus rapprochées du milieu D supportent des charges verticales moindres, et les parties extrêmes vers A et C supportent des charges verticales plus fortes que les poids des colonnes de terre correspondantes. Ainsi le massif a une tendance à répartir uniformément sur sa base les pressions verticales qu'il supporte; c'est ce qu'on observe en réalité, surtout pour les massifs arasés horizontalement et chargés de poids isolés à leur face supérieure.

§ 79. Cas d'un massif à talus inégaux.

L'angle β du talus le plus roide que puisse présenter un massif de terre, eu égard à la faculté de frottement de la base AC (fig. 131), est donné par la formule (41), mais seulement dans le cas où la section verticale ABC du massif considéré comme prismatique est un triangle isocèle. S'il n'en est pas ainsi, et que l'on donne, par exemple, l'un des deux angles BAC, BCA, l'autre se trouvera déterminé en fonction du premier. L'angle du talus changerait pareillement si le massif était de forme pyramidale ou conique. La recherche complète de l'angle β pour toutes les formes possibles du massif nous conduirait trop loin, sans grand profit pour la pratique.

Fig. 131.



Nous nous bornerons à dire quelques mots du cas le plus intéressant, celui où le massif, semblable aux précédents à tout autre égard, a pour section un triangle scalène ABC.

Dans ce cas, on ne peut affirmer que la pression qui s'exerce sur la section verticale BD sera nécessairement horizontale. Mais comme cette pression sera en réalité près de l'horizontale, nous admettrons son horizontalité ; en appliquant alors à chaque côté du massif l'équation (36), on aura deux valeurs maximum de la poussée Q, le prisme BDF exerçant une plus grande poussée que BDE, du moment où l'angle BCD $<$ BAD. C'est la plus grande de ces deux valeurs de Q qu'on devra évidemment considérer comme étant la pression qui s'exerce réellement dans la section BD. Il en résulte que le prisme BDE, qui a la tendance maximum au glissement, n'est plus sur le point de glisser sur sa face inférieure, mais qu'il est poussé par la force Q d'intensité excédante qui fournit une composante tendant à le faire remonter le long de DE : donc la résis-

tance sur la face ED fera avec la normale un angle plus petit que l'angle du frottement φ.

Si l'on se donne un des deux angles de talus en A et C, par exemple le talus en C, cet angle devra être évidemment plus petit que l'angle β que l'on cherche en A, puisque ce dernier doit être le plus grand talus possible. Donc la poussée horizontale Q sur la surface BD sera donnée par le prisme de plus grande poussée BDF, répondant au massif CBD. Appelant β_1 l'angle donné BCD, on aura d'après (30)

$$Q = \frac{1}{2} w H^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sin \varphi \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tang} \beta_1}{\operatorname{tang} \varphi}}\right)^2}. \tag{42}$$

L'angle $\psi = PKN$ que fait la résistance P de la base AD avec la normale à AD prend l'expression suivante, analogue à (37), attendu que le poids du massif est toujours $W = \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\operatorname{tang} \beta}$:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{Q}{W} = \operatorname{tang} \beta \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 + \sin \varphi \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tang} \beta_1}{\operatorname{tang} \varphi}}\right)^2}. \tag{43}$$

Il faut que β soit le plus grand possible ; pour cela il faut faire $\psi = \varphi'$ angle du frottement de la terre sur la base AD. Cette condition détermine β :

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \varphi \frac{\left(1 + \sin \varphi \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tang} \beta_1}{\operatorname{tang} \varphi}}\right)^2}{\cos^2 \varphi}. \tag{44}$$

Il est bien entendu que si cette formule donne pour β une valeur plus grande que φ, on devra considérer l'angle φ lui-même comme étant le talus maximum cherché au point A.

Si la face supérieure BC du massif BCD était horizontale, on aurait $\beta_1 = 0$, et les équations (43) et (44) se réduiraient comme il suit :

$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{45}$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{46}$$

Dans ce dernier cas, si l'on veut que le talus maximum en A ne soit autre que l'angle φ du frottement, il faut qu'on ait (45)

$$\operatorname{tang} \varphi' \geqq \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{47}$$

Si, par exemple, $\varphi = 45°$, il faut, pour que cette condition soit remplie, qu'on ait $\varphi' \geqq 9° + 44'$. Si, au contraire, φ' était seulement de 5°, par exemple, l'équation (46) donnerait le talus maximum au point A : $\beta = 27° + 1'$.

›rs ponts connus.

par mètre carré du joint de culée.	Rapport de $\frac{S}{d}$ à $\frac{Q}{c}$.	Moment de la demi-voûte.	Stabilité de la culée contre le renversement.	Tangente de l'angle de la pression à la culée avec l'horizontale.	Angle de la pression à la culée avec l'horizontale.	Angle de la pression à la culée avec la normale au joint de culée.	Poids de la voûte et des tympans.	Tangente de l'angle de la pression sur le joint horizontal de naissance, avec la verticale.	Stabilité contre le glissement.
$\frac{S}{d}$	$\frac{Sc}{Qd}$	M	n	$\frac{P}{Q}$	α	γ	W	$\frac{Q}{W}$	m
›,25	3,4	2,1	3,70	3,42	73°+42′	+(16°+18′)	6,51	0,173	5,79
›,75	1,6	5,7	3,31	1,51	56°+33′	−(25°+30′)	14,41	0,343	2,92
›,16	2,3	9,9	2,45	2,07	64°+16′	−(7°+29′)	13,61	0,290	3,45
›,75	2,3	20,2	2,20	2,13	64°+52′	−(6°+45′)	18,14	0,331	3,02
›,96	0,96	24,3	1,96	1,18	49°+41′	−(19°+26′)	21,00	0,526	1,90
,09	2,2	48,5	3,52	1,97	63°+8′	−(10°+ 1′)	38,45	0,292	3,42
,20	2,7	76,2	2,87	2,70	69°+41′	+(20°+19′)	59,15	0,221	4,52
›,44	3,9	113	4,24	3,88	75°+32′	+(14°+28′)	98,10	0,130	7,71
›,33	4,3	137	4,41	4,29	76°+53′	+(13°+ 7′)	131	0,112	8,96
›,13	2,3	125	7,93	2,36	67°+2′	+(22°+58′)	132	0,144	6,94
›,80	1,3	50	1,49	1,00	45°	−(25°+ 5′)	28,6	0,702	1,42
›,37	2,6	143	1,70	2,64	69°+14	+(20°+46′)	75	0,274	3,65
›,80	1,5	74	4,33	1,25	51°+20′	−(15°+35′)	51	0,393	2,55
›,96	4,4	243	8,34	4,36	77°+5′	+(7°+28′)	205	0,099	10,09
›,88	4,0	247	7,93	4,01	76°	+ 14°	190	0,110	9,08
›,65	3,2	230	2,61	3,06	71°+55′	−(0°+50′)	119	0,200	5,00
›,94	4,2	320	4,75	4,19	76°+35′	+(13°+25′)	201	0,123	8,14
›,02	2,3	217	2,17	2,28	66°+18′	+(23°+42′)	100	0,273	3,28
›,40	2,6	249	3,24	2,58	68°+48′	+(21°+12′)	122	0,237	4,23
›,12	1,1	58	1,13	0,62	31°+50′	−(18°+11′)	30	1,009	1,00
5,63	3,8	482	»	3,71	74°+56′	+(4°+41′)	»	»	»
5,65	2,1	356	2,52	2,14	64°+57′	+(25°+ 3′)	134	0,297	3,37
3,70	2,0	361	2,36	1,98	63°+14′	+(26°+46′)	142	0,294	3,39
9,10	1,2	164	1,31	0,85	40°+23′	−(16°+50′)	58	0,797	1,25
3,45	1,9	446	»	1,97	3°+3′	+(26°+57′)	»	»	»
4,22	4,0	1002	»	4,07	76°+12′	+(13°+48′)	»	»	»
7,02	2,3	612	2,95	2,33	66°+45′	+(23°+15′)	219	0,245	4,08
9,03	1,4	268	5,35	1,02	45°+39′	−(15°+24′)	120	0,434	2,30
0,05	1,3	291	3,99	1,00	44°+1′	−(17°+32′)	106	0,548	1,82
8,25	3,1	1141	2,55	2,96	71°+22′	+(1°+41′)	292	0,212	4,72
7,50	3,5	1498	2,86	3,40	73°+35′	+(6°+ 4′)	385	0,172	5,79
6,45	2,1	775	»	2,10	64°+35′	+(25°+25′)	»	»	»
8,32	1,8	726	2,78	1,80	60°+54′	+(29°+ 6′)	225	0,315	3,17
2,00	1,1	276	»	0,70	35°+2′	−(18°+11′)	»	»	»
5,02	2,1	852	2,68	1,88	61°+58′	−(8°+51′)	218	0,323	3,10
0,12	1,9	821	1,58	1,70	59°+33′	−(12°+34′)	148	0,516	1,94
7,17	3,3	2201	4,26	3,19	72°+36′	+(2°+32′)	608	0,151	6,64
9,39	2,2	417	»	2,19	65°+30′	+(24°+30′)	»	»	»
8,02	1,7	1061	2,16	1,69	59°+21′	+(30°+39′)	224	0,404	2,48
0,12	0,7	808	»	0,89	41°+35′	−(17°+18′)	»	»	»

Paris. — Typ. Hennuyer et fils.

LIVRE IV.

THÉORIE DES MURS DE SOUTÈNEMENT.

§ 80 Remarques générales.

Avant que la théorie de la poussée des terres ait été basée sur des principes en partie rationnels, on se contentait, pour le calcul des murs de soutènement, de formules empiriques qui tenaient incomplétement et inexactement compte des forces appliquées au mur : ces formules étaient établies de manière à donner, dans les cas ordinaires d'application, des dimensions sanctionnées par l'expérience. Telle est en particulier la formule de Vauban. Mais, à raison de leur origine, de semblables formules ne sont applicables qu'entre des limites restreintes et donnent en dehors de ces limites les résultats les plus contradictoires. Leur plus grave défaut est celui-ci : elles devraient donner l'épaisseur du mur en fonction de sa hauteur et de la hauteur des terres à soutenir ; or, elles donnent un nombre simplement proportionnel à la hauteur des terres à soutenir. De la sorte, s'il existe un très-haut massif derrière le mur (cas fréquent dans les chemins de fer), on obtient des dimensions énormes, et si la hauteur du massif est infinie, on trouve une épaisseur infinie. Il est cependant évident que la hauteur et le fruit extérieur du mur restant les mêmes, l'augmentation du massif de terre a relativement peu d'importance, et que la poussée du massif contre le mur a toujours une valeur finie, quand même il soutiendrait le pied d'une montagne indéfinie.

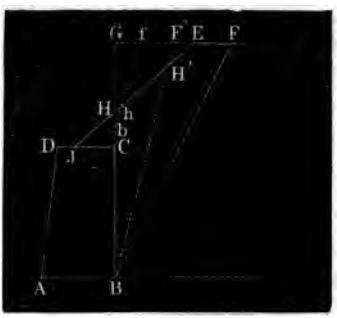
Coulomb ayant découvert les bases véritables de la théorie de la poussée des terres, plusieurs auteurs ont établi des formules rationnelles pour les murs de soutènement ; fondées sur les vrais prin-

cipes, elles devraient dépasser les étroites limites des formules précédentes et demeurer applicables à tous les cas possibles. Malheureusement il n'en est pas ainsi. J'ai reconnu que les formules dites rationnelles, dont l'énoncé m'était connu, ne donnent des dimensions admissibles que dans certaines limites que les auteurs ont d'ailleurs négligé d'indiquer ; en dehors de ces limites, leur application peut exposer à de graves mécomptes. Les murs de soutènement ont un rôle trop important dans la fortification et dans les travaux de chemins de fer pour qu'il ne soit pas intéressant de rectifier ces formules.

§ 81. Critique de la théorie de Poncelet et de Moseley.

Il ne s'agit point ici de discuter toutes les formules connues relatives aux murs de soutènement. Je me bornerai à montrer les erreurs que contient le traité de M. Poncelet *sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations* (Mémorial de l'officier du génie, n° 19, 1838). Cette démonstration n'a pas moins d'importance que l'établissement de formules nouvelles, car M. Poncelet jouit d'une si grande autorité, que beaucoup de constructeurs ne se donnent pas la peine de contrôler par eux-mêmes sa théorie, admettent ses résultats comme incontestables et les appliquent sans aucune inquiétude.

Fig. 132.



Considérons le cas général où un massif BCIEF, limité à un terre-plein supérieur horizontal EF et à un talus d'inclinaison quelconque EIC, s'appuie contre la face postérieure verticale d'un mur ABCD (fig. 132).

M. Poncelet commence par négliger le frottement du massif contre le parement postérieur BC et admet ainsi que la pression se développe normalement à cette face. Or, dans la pratique, la paroi BC est moins polie ou plus rugueuse que ne l'est une section de l'intérieur du massif de terre ; dans ce cas, évidemment, la paroi BC ne *peut agir* autrement que si elle était une section du massif de terre ;

car les sections verticales du massif qui sont infiniment rapprochées de BC, et sur lesquelles doit exister l'équilibre, ne peuvent développer un frottement plus fort que le frottement de terre contre terre ; d'où il suit que dans le glissement du massif, la plus grande faculté de frottement du mur retiendra contre le mur une tranche de terre très-mince.

C'est seulement dans le cas d'un mur plus poli que le terrain que l'on aurait à tenir compte d'un certain coefficient de frottement inférieur à celui de terre sur terre ; dans ce cas, la tranche verticale de terre contiguë au mur ne recevrait pas une tendance au glissement de terre sur terre assez forte pour que le glissement eût lieu ; ainsi, le mouvement se produisant, cette tranche ne resterait pas fixée au mur, comme dans le cas précédent, mais bien fixée au massif, et se détacherait ainsi du mur (voir § 72 ci-dessus).

Soit BF le plan de rupture ; d'après le principe de la moindre résistance, les actions qui se produisent sur les faces BF et BH doivent être aussi inclinées que possible, de sorte que la poussée horizontale soit aussi faible que possible : la direction du plan de rupture étant déterminée de manière que ce prisme soit celui qui exerce sur la face BH la plus grande poussée. Ainsi toute la faculté de frottement des deux faces BF et HB entre en jeu, et il en résulte que les résistances de ces deux faces font avec les normales à ces faces un angle égal à l'angle du frottement ou au talus naturel des terres.

Ce dernier angle est, pour la plupart des sortes de terre, proche de 45° ; ainsi l'hypothèse de la normalité des pressions sur la paroi BC est très-éloignée de la vérité. Il est vrai que la valeur de la poussée, calculée comme le fait M. Poncelet, n'est pas très-altérée, ainsi que nous le verrons plus loin, et qu'elle est altérée en plus, de sorte que les hypothèses dont il s'agit sont favorables à la stabilité du mur ; mais, quand on voit un mémoire comme celui de M. Poncelet procéder par des calculs compliqués et des formules d'application difficile pour arriver à une construction si simple, on a droit de s'attendre à un degré de rigueur en rapport avec la complication qu'on a dû subir ; d'autant plus que, comme solution approximative, on a déjà des coefficients de stabilité qui suffisent aux besoins de la pratique courante.

Mais voici qui est plus grave que l'hypothèse dont nous venons de parler. M. Poncelet, s'occupant du prisme de plus grande poussée FBHE, considère dans tous les cas et sans explication la section

FBHE d'un prisme quelconque comme étant donnée par la différence des triangles FBG et EHG, et il égale à zéro le coefficient différentiel de la poussée correspondante. Or, la différence de ces deux triangles ne représente la section du prisme considéré que dans le cas où la direction de la face inférieure BF rencontre le couronnement EF du massif *à droite* du point E. On ne peut pas savoir d'avance si le plan de rupture qu'on déduira de l'équation différentielle remplira cette condition ; mais, même dans ce cas, on n'est pas assuré qu'il n'y aurait pas lieu de recourir à une autre équation obtenue dans le cas de figure où la face inférieure des prismes considérés rencontrerait le talus HE à gauche du point E, comme BF' ou comme *bf*. Or, pour un prisme de cette nature, la section est représentée par un triangle H'BH, qui est la différence entre le triangle F'BG et le quadrilatère F'H'HG.

Si l'on veut maintenant remplacer, comme on le fait sans le remarquer dans les formules de M. Poncelet, le quadrilatère à retrancher par le triangle plus grand EHG, qui demeure constant pour tous les prismes, on est conduit à retrancher un nombre trop fort : on a donc pour le prisme un poids trop faible. Si le talus IE est très-doux et très-long, et que la hauteur de charge CG soit grande, on peut se heurter à cette absurdité, que le poids trouvé serait négatif. C'est ce que montrent aussi les expressions données pour la poussée horizontale F d'un prisme quelconque au n° 2 de l'ouvrage de M. Poncelet. A la vérité, après la différentiation, la poussée horizontale P du prisme de plus grande poussée est donnée comme le produit d'une quantité positive par le carré d'une différence, ce qui donne un nombre essentiellement positif. Mais ce désaccord provient de ce qu'en différentiant on a omis de vérifier si la valeur trouvée de l'angle GBF, qu'on prend pour angle de rupture, remplit ou non les conditions de l'équilibre établies plus haut. Il est clair que cet angle de rupture GBF ne saurait être plus grand que l'angle du talus naturel avec la verticale ; sans cela le massif HBF n'aurait aucune tendance au glissement, par conséquent aucune poussée. Dans ce dernier cas, les formules ne représentent donc plus en aucune façon les lois réelles.

Or, on peut très-facilement donner au talus EI une telle inclinaison, ou à la hauteur HG une dimension telle, que la tangente de l'angle de rupture GBF, déduite des formules (*c*) et (*e*) (n°s 3 et 4 de M. Poncelet), soit inadmissible, comme donnant un angle trop

grand. C'est cette impossibilité qui explique que l'intégrale basée sur la différence des triangles GBF et GHE, quoiqu'en général fautive, ne donne cependant jamais de poussée négative. Mais on peut disposer de l'angle GHE ou de la hauteur GH, de sorte que la poussée P donnée par les formules (*b*) et (*d*) (n°s 3 et 4), soit nulle pour toutes les valeurs de la hauteur donnée BC. Cela aura lieu si l'on pose

$$\operatorname{tang} GHE = \left(\frac{GB}{GH}\right)^2 \operatorname{tang} \alpha,$$

α étant l'angle du talus naturel avec la verticale. En même temps l'angle de rupture GBF$=\alpha$.

Si l'on augmente l'angle GHE ou qu'on diminue l'inclinaison du talus effectif IE, comme on le fait toujours quand la hauteur de surcharge doit avoir quelque importance, les formules de M. Poncelet donnent des résultats entièrement faux, puisqu'elles conduisent à un angle de rupture plus grand que α. Mais dans les autres cas ces formules sont encore inexactes.

Pour des talus peu inclinés IE, les formules (*b*), (*d*) font croître la poussée horizontale P contre un même mur BC jusqu'à l'infini, quand HG croît indéfiniment. On devrait donc faire croître à l'infini l'épaisseur du mur. Mais ce résultat erroné est évidemment en contradiction avec les explications des n°s 15 à 20, dans lesquels l'auteur applique ces formules au cas d'un terrain moyen où $\alpha = 45°$, tang $\alpha = 1$, limité par un talus dont l'angle GHE est égal à l'angle α du talus naturel avec la verticale. Dans ce cas particulier, en effet, l'auteur montre que l'épaisseur du mur ne doit point croître indéfiniment avec GH, tandis qu'il en serait ainsi pour des talus plus doux. Les formules de M. Poncelet ne s'éloignent pas beaucoup de la vérité dans ce cas particulier ; mais leur inexactitude fondamentale doit leur ôter toute importance.

Cela résulte clairement du tableau inséré au n° 20. D'après ce tableau, l'épaisseur d'un mur vertical, soutenant un massif de hauteur infinie, incliné à 45°, devrait être, pour donner un coefficient de stabilité égal à 2, les $\frac{1243}{1000}$ de la hauteur du mur si le talus aboutit en D, les $\frac{461}{1000}$ si le talus aboutit en C. Dans le premier cas, un mur de 6 mètres de hauteur devrait avoir une épaisseur de $7^m,46$; dans le second, une épaisseur de $2^m,77$. Or, il est visible que ces nombres

ne sont, ni par leur valeur absolue, ni l'un par rapport à l'autre, en conformité avec la nature des choses.

La table du n° 34 présente des anomalies semblables pour diverses sortes de terres et divers matériaux de construction. Mais l'anomalie la plus choquante est celle de la table du n° 53, où l'on détermine l'influence des différents coefficients de stabilité pour le glissement dans diverses circonstances. Ainsi, f_1 étant le coefficient de frottement pour la maçonnerie, on admet un coefficient de stabilité contre le glissement, $\delta_1 = 2,65 . f_1$, on considère un mur soutenant cinquante fois sa hauteur de terres : on donne alors au mur une épaisseur égale à sa hauteur multipliée par 17,35, si le talus IE commence en D, multipliée par 17,30 si la berme DI égale le cinquième de cette hauteur, enfin par 0,44 seulement si le talus commence en C : tandis que, pour un coefficient de stabilité égal à $2f_1$, l'épaisseur est, dans le premier de ces trois cas, les 0,93, et dans le deuxième les 0,33 de la hauteur du mur.

M. Poncelet a nécessairement tiré de ces formules et de ces tables des conséquences qui peuvent induire complétement en erreur sur les phénomènes qui se produisent. Par exemple, au n° 63, il dit qu'il est à peine possible d'indiquer pour le coefficient de stabilité δ_1 une valeur quelconque pratiquement utilisable, attendu que le moindre changement de δ_1 amène des différences considérables dans l'épaisseur du mur. Après avoir déterminé cette épaisseur pour l'équilibre strict, soit pour $\delta_1 = 1$, dans le cas de remblais vingt à trente fois plus hauts que le mur, on devrait, dans la pratique, non doubler ou tripler, mais bien centupler cette épaisseur pour faire tenir ce mur sous le coefficient $\delta_1 = 3,3 \times f_1 = 3,3 \times 0,7 = 2,31$; et l'on n'aurait ainsi qu'une stabilité contre le glissement équivalente à celle que donne contre le renversement le coefficient $\delta = 1,912$ déduit des profils de Vauban. Si, dans la pratique, on veut soutenir des remblais de quelque élévation par un mur de stabilité modérée, en sorte que le doublement de la poussée en détermine soit le glissement, soit le renversement, M. Poncelet dissuade, dans son n° 64, de l'application de ses calculs, quoique, d'après ses propres remarques, il ait omis dans ces calculs plusieurs circonstances favorables à la stabilité.

Les formules que donne Moseley dans son ouvrage : *The mechanical principles of engineering and architecture*, conduisent à de semblables incertitudes. En traduisant cet ouvrage, j'ai reconnu

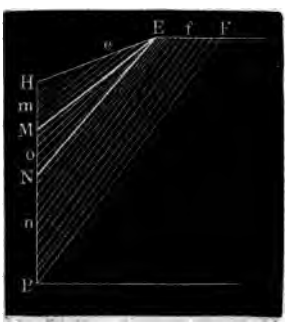
que ses formules ne sont applicables qu'aux charges de terre d'élévation médiocre et mènent à des non-sens pour les hautes charges. Aussi dans ma traduction (§ 330 à 332) ai-je inséré quelques observations explicatives sur lesquelles je n'ai pas d'ailleurs appelé spécialement l'attention.

§ 82. Principe général pour l'établissement de nouvelles formules.

Il faut maintenant s'occuper de l'établissement de formules nouvelles. Pour être aussi rigoureux que possible, on devrait procéder comme il suit.

Soit HB (fig. 133) la face verticale sur laquelle s'exerce la poussée du massif profilé suivant HEF. Soit *me* le plan de rupture du prisme qui pousse la partie H*m* du mur HB; si l'on fait varier la hauteur H*m* de zéro à HB, on reconnaît facilement que les plans de rupture demeurent parallèles à eux-mêmes jusqu'à la position ME correspondante à HM. A partir du point E la loi change. Reprenons le même mouvement en sens contraire, et faisons varier la hauteur partielle considérée à partir de la valeur HB, en diminuant; soient BF,*nf* respectivement les plans de rupture qui répondent à la paroi HB tout entière et à la partie H*n*. Chacun de ces plans sera plus incliné que ME, et ces plans, qui ne seront plus parallèles entre eux, auront une inclinaison d'autant plus grande que le point *n* sera plus bas, en sorte que BF est le plus incliné de tous. On admet que la direction des plans tels que *me*, *nf* a été déterminée, par la théorie des maximum et minimum, de manière que les prismes H*me*, H*nf* exercent une poussée maximum sur H*m*,H*n*. Si l'on va ainsi s'élevant à partir du point B, on rencontrera un point N, inférieur à M, et pour lequel le plan de rupture du système *nf* passera par E. Prenons maintenant entre M et N un point *o* : le plan de rupture correspondant à H*o*, déterminé par la méthode du maximum, ne peut avoir

Fig. 133.

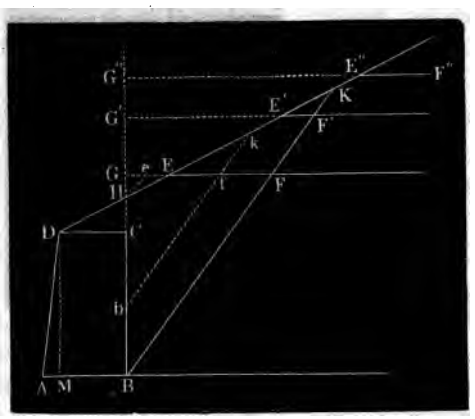


une position quelconque : car si cette méthode donnait un plan passant entre H et E, ce plan appartiendrait aux *me;* si le plan passait entre E et F, il appartiendrait aux *nf:* deux choses impossibles. Le prisme de plus grande poussée sur H*o* sera donc le prisme H*o*E, dont la base passe en E. Ainsi, de HM à HN, toutes les parois partielles ont des prismes de rupture passant par le point E.

Il est nécessaire de connaître la position de tous les plans de rupture entre H et B, non pour calculer la grandeur, mais pour calculer le point d'application de la poussée qui agit sur HB. Suivant que le pied du mur B est plus haut que M, ou situé entre M et N, ou inférieur à N, on devrait, pour être exact, établir et combiner une, deux ou trois expressions différentes, ce qui conduirait à des formules très-compliquées et inapplicables : il faudrait recourir tantôt à l'une, tantôt à l'autre, en faisant des essais pour reconnaître le cas où l'on se trouve.

Il y a donc lieu de chercher des formules simples, s'éloignant peu de la vérité et telles que toutes les simplifications introduites soient favorables à la stabilité du mur qu'on se propose de calculer. On pourra suivre à cet effet la marche que voici :

Fig. 134.



Soit BHEF (fig. 134) le profil du massif de terre qui exerce une pression sur le plan HB, et H*b*f E le prisme de plus grande poussée pour la hauteur H*b;* si la hauteur HG du plan horizontal EF au-dessus du point H n'est pas trop grande, ou si le talus extérieur HE n'est pas de trop faible inclinaison, on peut admettre, sans grande erreur, que le talus extérieur H*e*, depuis le point H, est parallèle au plan de rupture *bf.* Comme tout plan de rupture est plus incliné que le talus naturel, et que le talus effectif ne peut être plus roide que le talus naturel, il s'ensuit que par cette hypothèse on exagère le poids du massif et en même temps la poussée contre le mur : chaque prisme H*b*f E *est ainsi* augmenté du petit prisme HE*e*.

Si, au contraire, la hauteur ou la roideur du talus HE dépasse une certaine limite, comme pour le profil BHE'F', on se rapprochera davantage de la vérité en admettant que le massif se prolonge vers le haut, de manière que le prisme de rupture BF'K rencontre le talus lui-même. Cette hypothèse augmente les prismes qui partent de très-bas, comme HBF'E', de la petite masse E'F'K, tandis que ceux qui partent de points plus élevés, tels que H*bk*, demeurent sans changement. On ne peut ainsi qu'augmenter la poussée contre le mur. Si le terre-plein horizontal est d'une hauteur suffisante, comme E''F'', le résultat est tout à fait exact. Ce résultat est d'ailleurs indépendant de la hauteur réelle HG', d'où l'on conclut que si le massif dépasse une certaine hauteur, un exhaussement ultérieur est sans influence sur la poussée. Cette conclusion est subordonnée d'ailleurs à l'hypothèse qui assimile la surface de rupture à un plan, ce qui n'est pas toujours exact.

§ 83. Formules pour la poussée des terres dans le premier cas.

Soient (fig. 134) :

H la hauteur verticale BC du mur;

a son épaisseur en couronne CD;

h la charge de terre CG au-dessus du couronnement du mur;

c la hauteur HG;

α l'angle EDC du talus effectif avec l'horizon;

φ le talus naturel des terres mesuré par son inclinaison sur l'horizon;

x une ordonnée variable G*b*, comptée de haut en bas à partir du point G;

ψ l'angle que fait avec l'horizon le plan de rupture correspondant au point *b*, angle que nous nommerons angle de rupture;

w le poids spécifique de la terre;

W le poids d'un prisme de plus grande poussée, tel que H*bfe*, d'une hauteur égale à 1 normalement au plan de la figure;

P la poussée de ce prisme contre la surface H*b*;

Q, R les composantes horizontale et verticale de cette pression P;

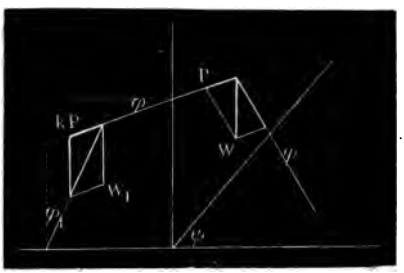
z la hauteur du point d'application de la force P au-dessus du point b.

Nous supposons ici He parallèle à bf : dès lors la surface $Hbfe = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - c^2}{\tang \psi}$

d'où
$$W = \frac{w}{2} \cdot \frac{x^2 - \rho^2}{\tang \psi}. \qquad (1)$$

On a déjà remarqué plus haut que, quand le frottement de la terre contre le mur est plus grand que le frottement de terre sur terre (ce qui a toujours lieu en réalité), on ne doit considérer néanmoins le parement du mur que comme agissant comme une surface fixe de terre. Si d'ailleurs, en réalité, les choses ne se passaient pas tout à fait ainsi, cette hypothèse ne serait que favorable à la stabilité du mur. Dès lors, en vertu du principe de la moindre résistance, les deux surfaces bH et bf fournissent des résistances dont les angles avec les normales à ces deux surfaces sont respectivement des maximum, c'est-à-dire égaux à φ. Qu'on décompose donc le poids W (fig. 135) en deux composantes, on aura facilement pour la composante dirigée contre le mur, c'est-à-dire pour la poussée P contre bG :

Fig. 135.



$$P = W \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\cos(2\varphi - \psi)} = W \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\tang \psi - \tang \varphi}{1 + \tang 2\varphi \tang \psi}; \qquad (2)$$

ou, en remplaçant W par sa valeur (1),

$$P = \frac{w(x^2 - c^2)}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\tang \psi - \tang \varphi}{\tang \psi + \tang 2\varphi . \tang^2 \psi}. \qquad (3)$$

Cette poussée devient un maximum pour

$$\tang \psi = \tang \varphi + \sqrt{\frac{\tang \varphi}{\sin 2\varphi}} = \tang \varphi + \frac{1}{\cos \varphi \sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Cette équation donne l'angle de rupture répondant à un point

quelconque b. L'angle est indépendant de la profondeur de ce point. Si l'on introduit dans (3) la valeur de tang ψ, et qu'on y fasse en même temps

$$x = \mathrm{GB} = \mathrm{H} + h \text{ et } c = \mathrm{HG} = \mathrm{CG} - \mathrm{CH} = h - a.\ \mathrm{tang}\ \alpha,$$

la poussée des terres sur le parement BH tout entier se trouve exprimée par

$$\mathrm{P} = \frac{w}{2}(\mathrm{H} + a\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - a\ \mathrm{tang}\ \alpha)\frac{\cos\varphi}{(1 + \sin\varphi\sqrt{2})^2}. \qquad (5)$$

Dans cette formule il reste une inconnue : l'épaisseur en couronne du mur de soutènement, a, qui entre dans la quantité a tang α qui est la hauteur CH. Nous nous débarrasserons de cette quantité en la remplaçant par une fraction déterminée de la hauteur H du mur, et choisissant la plus grande fraction qui puisse être donnée dans les cas pratiques par les formules qu'on verra plus loin. En général, a est au plus le tiers de H. Posons cependant plus généralement $a = n\mathrm{H}$. Pour abréger les calculs, posons en outre

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{\cos\varphi}{2(1 + \sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\cos\varphi}{(\sqrt{2} + 2\sin\varphi)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1{,}4142 + 2\sin\varphi)^2},\\
q &= p\cos\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{2(1 + \sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\cos^2\varphi}{(1{,}4142 + 2\sin\varphi)^2},\\
r &= p\sin\varphi = q\ \mathrm{tang}\ \varphi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2(1 + \sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1{,}4142 + 2\sin\varphi)^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

On trouve alors pour la poussée totale :

$$\mathrm{P} = pw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha); \qquad (7)$$

puis, pour sa composante horizontale ;

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P}\cos\varphi = qw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha), \qquad (8)$$

et pour sa composante verticale :

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}\sin\varphi = rw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha). \qquad (9)$$

Il est à remarquer que si la charge est assez peu élevée pour que

CG soit $<$ CH ou $h < a \operatorname{tang} \alpha$, on doit, dans les formules qui précèdent, remplacer $a \operatorname{tang} \alpha$ par h, ce qui donne :

$$P = pw(H+h)^2, \quad Q = qw(H+h)^2, \quad R = rw(H+h)^2. \tag{10}$$

Si $h = 0$, les formules se simplifient encore :

$$P = pwH^2, \quad Q = qwH^2, \quad R = rwH^2. \tag{10a}$$

§ 84. Formules pour la poussée des terres dans le second cas.

Conservant les notations du paragraphe précédent, nous nommons en outre y la profondeur d'un point b quelconque au-dessous du point H, et W', P', Q', R' le poids, la poussée résultante, les poussées horizontale et verticale d'un prisme de terre Hbk contre le parement Hb.

La distance du point k à la verticale BG′ est ici :

$$\frac{y}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha},$$

donc la surface

$$Hbk = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha};$$

d'où

$$W' = \frac{w}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha}; \tag{11}$$

et, en ayant égard à (2) :

$$P' = \frac{w}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang} 2\varphi \operatorname{tang}\psi}, \tag{12}$$

$$= \frac{w}{2} y^2 \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang} 2\varphi \operatorname{tang}^2\psi + [1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} 2\varphi] \operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha}.$$

Cette poussée devient un maximum pour

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\varphi + \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha}{\sin 2\varphi}} = \operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}}. \tag{13}$$

L'angle ψ de rupture ainsi déterminé pour le point b est indé-

quelconque b. L'angle est indépendant de la profondeur de ce point. Si l'on introduit dans (3) la valeur de tang ψ, et qu'on y fasse en même temps

$$x = \mathrm{GB} = \mathrm{H} + h \text{ et } c = \mathrm{HG} = \mathrm{CG} - \mathrm{CH} = h - a.\ \mathrm{tang}\ \alpha,$$

la poussée des terres sur le parement BH tout entier se trouve exprimée par

$$\mathrm{P} = \frac{w}{2}(\mathrm{H} + a\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - a\ \mathrm{tang}\ \alpha)\frac{\cos\varphi}{(1 + \sin\varphi\sqrt{2})^2}. \qquad (5)$$

Dans cette formule il reste une inconnue : l'épaisseur en couronne du mur de soutènement, a, qui entre dans la quantité a tang α qui est la hauteur CH. Nous nous débarrasserons de cette quantité en la remplaçant par une fraction déterminée de la hauteur H du mur, et choisissant la plus grande fraction qui puisse être donnée dans les cas pratiques par les formules qu'on verra plus loin. En général, a est au plus le tiers de H. Posons cependant plus généralement $a = n\mathrm{H}$. Pour abréger les calculs, posons en outre

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\cos\varphi}{(\sqrt{2}+2\sin\varphi)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1,4142+2\sin\varphi)^2},\\
q &= p\cos\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{2(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\cos^2\varphi}{(1,4142+2\sin\varphi)^2},\\
r &= p\sin\varphi = q\ \mathrm{tang}\ \varphi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1,4142+2\sin\varphi)^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

On trouve alors pour la poussée totale :

$$\mathrm{P} = pw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha); \qquad (7)$$

puis, pour sa composante horizontale ;

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P}\cos\varphi = qw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha), \qquad (8)$$

et pour sa composante verticale :

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}\sin\varphi = rw(\mathrm{H} + n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha)(\mathrm{H} + 2h - n\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\ \alpha). \qquad (9)$$

Il est à remarquer que si la charge est assez peu élevée pour que

CG soit $<$ CH ou $h < a$ tang α, on doit, dans les formules qui précèdent, remplacer a tang α par h, ce qui donne :

$$P = pw(H+h)^2, \quad Q = qw(H+h)^2, \quad R = rw(H+h)^2. \quad (10)$$

Si $h = 0$, les formules se simplifient encore :

$$P = pwH^2, \quad Q = qwH^2, \quad R = rwH^2. \quad (10\,a)$$

§ 84. Formules pour la poussée des terres dans le second cas.

Conservant les notations du paragraphe précédent, nous nommons en outre y la profondeur d'un point b quelconque au-dessous du point H, et W′,P′,Q′,R′ le poids, la poussée résultante, les poussées horizontale et verticale d'un prisme de terre Hbk contre le parement Hb.

La distance du point k à la verticale BG′ est ici :

$$\frac{y}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha},$$

donc la surface

$$Hbk = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha};$$

d'où

$$W' = \frac{w}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha}; \quad (11)$$

et, en ayant égard à (2) :

$$P' = \frac{w}{2} \cdot \frac{y^2}{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang} 2\varphi \operatorname{tang}\psi}, \quad (12)$$

$$= \frac{w}{2} y^2 \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang} 2\varphi \operatorname{tang}^2\psi + [1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} 2\varphi] \operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\alpha}.$$

Cette poussée devient un maximum pour

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\varphi + \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha}{\sin 2\varphi}} = \operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}}. \quad (13)$$

L'angle ψ de rupture ainsi déterminé pour le point b est indé-

On verra plus tard que l'on doit prendre pour n la valeur $\frac{1}{3}$, qu'ainsi $a = \frac{1}{3}$ H approximativement dans les cas les plus défavorables. Remplaçant dans (19) n par cette valeur et en même temps p et p' par leurs expressions, on a

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{6}\left\{\frac{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2}{\left(1+\sin\varphi\sqrt{2-\frac{2\tang\alpha}{\tang\varphi}}\right)^2}\cdot(3+\tang\alpha)-(3-\tang\alpha)\right\}. \quad (20)$$

Pour une même valeur de φ, $\frac{h}{H}$ croît avec α. Mais α ne peut dépasser le talus naturel φ. Si donc on fait $\alpha = \varphi$, on aura le maximum des valeurs que peut atteindre $\frac{h}{H}$ pour une valeur donnée de φ. Ce maximum est

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{6}\left\{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2.(3+\tang\varphi)-(3-\tang\varphi)\right\}. \quad (21)$$

Ce maximum lui-même croît avec l'angle φ du talus naturel. Dans la pratique, φ est au plus 45°. Le maximum du maximum est alors

$$\frac{h}{H} = \frac{7}{3}. \quad (22)$$

D'où il suit que la formule P ne saurait être applicable tout au plus qu'aux cas où la surcharge h ne dépasse pas deux fois $\frac{1}{3}$ la hauteur H du mur. Pour des hauteurs plus fortes, c'est P' qui donnera les résultats les plus exacts.

Si la surcharge est assez faible pour qu'on ait $h < a \tang\alpha$, ou sensiblement

$$\frac{h}{H} < \frac{\tang\alpha}{3}, \quad (23)$$

on devra appliquer les formules plus simples (10).

Les deux tableaux ci-dessous permettront d'apprécier plus aisément les limites des valeurs de $\frac{h}{H}$ pour lesquelles on doit avoir recours aux formules (10), (7), (16), ces limites variant avec α et φ.

dont l'inclinaison sur l'horizon ne dépasse pas l'angle φ du talus naturel, la poussée ne peut croître indéfiniment avec la hauteur de charge.

Pour $\alpha = 0$, les formules ci-dessus coïncident avec les formules (10 *a*).

§ 85. Limites d'application de chacune des formules précédentes.

En admettant l'une ou l'autre des deux hypothèses simplificatives que nous avons établies tout à l'heure, on modifie non-seulement l'intensité de la poussée, mais encore la hauteur du point d'application de cette force. Plus loin nous chercherons approximativement la hauteur de la poussée *réelle*, et nous assignerons cette hauteur comme bras de levier tant à la poussée P, tirée de (7), qu'à la poussée P′, tirée de (16). Cela donnera des résultats toujours trop forts, parce que P et P′ sont plus grands que la vraie poussée. Mais il faut remarquer tout d'abord que ce bras de levier est le même, soit qu'on se serve de l'expression P ou de P′. Par conséquent, le mur de soutènement le plus épais sera celui qui répondra à la plus grande des deux poussées P et P′. Or, chacune de ces deux poussées donne un mur trop fort ; on peut donc se contenter de donner au mur la plus faible des deux épaisseurs calculées ; en d'autres termes, de n'employer au calcul du mur que celle des deux formules qui répond à la moindre des deux valeurs P,P′.

Quelles que soient les valeurs des angles de talus effectif et de talus naturel, α et φ, la formule (7) ou (10) est celle qui donne la poussée la plus faible, par conséquent la plus voisine de la vérité, quand la surcharge de terre est petite, ou que h est petit par rapport à H. Si h augmente, P croît et pour une certaine valeur de h P atteint la valeur P′ tirée de (16). Si la surcharge de terre continue d'augmenter par rapport à la hauteur du mur, la formule P′ donne le résultat le moindre et par conséquent plus exact. Pour trouver la valeur de $\frac{h}{H}$ à laquelle doit avoir lieu le changement de formule, il faut faire P = P′ et résoudre l'équation par rapport à $\frac{h}{H}$. On a ainsi :

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p'}{p}(1 + n \operatorname{tang} \alpha) - (1 - n \operatorname{tang} \alpha)\right\} \qquad (19)$$

On verra plus tard que l'on doit prendre pour n la valeur $\frac{1}{3}$, qu'ainsi $a = \frac{1}{3}$ H approximativement dans les cas les plus défavorables. Remplaçant dans (19) n par cette valeur et en même temps p et p' par leurs expressions, on a

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{6}\left\{\frac{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2}{\left(1+\sin\varphi\sqrt{2-\frac{2\tang\alpha}{\tang\varphi}}\right)^2}\cdot(3+\tang\alpha)-(3-\tang\alpha)\right\}. \quad (20)$$

Pour une même valeur de φ, $\frac{h}{H}$ croît avec α. Mais α ne peut dépasser le talus naturel φ. Si donc on fait $\alpha = \varphi$, on aura le maximum des valeurs que peut atteindre $\frac{h}{H}$ pour une valeur donnée de φ. Ce maximum est

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{6}\left\{(1+\sin\varphi\sqrt{2})^2.(3+\tang\varphi)-(3-\tang\varphi)\right\}. \quad (21)$$

Ce maximum lui-même croît avec l'angle φ du talus naturel. Dans la pratique, φ est au plus 45°. Le maximum du maximum est alors

$$\frac{h}{H} = \frac{7}{3}. \quad (22)$$

D'où il suit que la formule P ne saurait être applicable tout au plus qu'aux cas où la surcharge h ne dépasse pas deux fois $\frac{1}{3}$ la hauteur H du mur. Pour des hauteurs plus fortes, c'est P' qui donnera les résultats les plus exacts.

Si la surcharge est assez faible pour qu'on ait $h < a \tang\alpha$, ou sensiblement

$$\frac{h}{H} < \frac{\tang\alpha}{3}, \quad (23)$$

on devra appliquer les formules plus simples (10).

Les deux tableaux ci-dessous permettront d'apprécier plus aisément les limites des valeurs de $\frac{h}{H}$ pour lesquelles on doit avoir recours aux formules (10), (7), (16), ces limites variant avec α et φ.

On tirera P de (7) jusqu'à ce que $\frac{h}{H}$ atteigne la valeur suiva calculée d'après (23).

TABLEAU I.

Où n'entre pas φ.

α	$\frac{h}{H}$
0°	0,00
15	0,09
30	0,19
45	0,33

On tirera P de (10) quand la valeur de $\frac{h}{H}$ sera comprise ent précédente et celle qui, dans le tableau suivant, répond à la r valeur de α.

TABLEAU II.

φ	α	$\frac{h}{H}$
0°	0°	0
15	0	0
»	15	0,56
30	0	0
»	15	0,23
»	30	1,33
45	0	0
»	15	0,18
»	30	0,47
»	45	2,33

Enfin on tirera P de (16) quand $\frac{h}{H}$ dépassera la valeur donn le tableau précédent.

§ 86. Hauteur du point d'application de la poussée

Chacune de nos deux hypothèses nous a conduit à con *tous* les plans de rupture répondant aux divers points entre

comme parallèles. Mais dans le premier cas, la section du prisme de plus grande poussée est un trapèze H*bfe*, dans le deuxième c'est un triangle H*bk*. A ces deux figures répondent des hauteurs z distinctes pour le point d'application de la poussée contre le parement entier HB (fig. 136).

Dans la première hypothèse, le point d'application sera au-dessous du point G d'une quantité exprimée par

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\overline{GB}^3-\overline{GH}^3}{\overline{GB}^2-\overline{GH}^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(H+h)^3-(h-a\tang\alpha)^3}{(H+h)^2-(h-a\tang\alpha)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(H+h)^2+(H+h)(h-a\tang\alpha)+(h-a\tang\alpha)^2}{(H+h)+(h-a\tang\alpha)}.$$

La hauteur z du point cherché au-dessus de B est $H+h$ moins l'expression précédente; soit :

$$z=\frac{H+3h-2a\tang\alpha}{3(H+2h-a\tang\alpha)}-(H+a\tang\alpha). \qquad (24)$$

Cette expression atteint son maximum avec h. D'après ce qui précède, le maximum répond à $\varphi=45^\circ$, $\alpha=45^\circ$ et $\frac{h}{H}=\frac{7}{3}$. La valeur correspondante de z, en tenant compte de $a=\frac{1}{3}H$, peut être mise sous la forme

$$z=0{,}458\ (H+a\tang\alpha). \qquad (25)$$

Pour des valeurs moindres de $\frac{h}{H}$, z est lui-même moindre et se rapproche de la valeur

$$z=0{,}333\ (H+a\tang\alpha), \qquad (26)$$

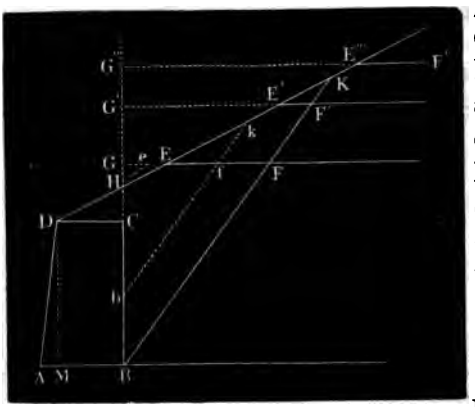
valeur limite qui répond au cas où, h étant plus petit que $a\tang\alpha$, le trapèze devient un triangle.

Dans la seconde hypothèse, qui doit être admise quand $\frac{h}{H}$ dépasse la limite donnée par (20), z est toujours représenté par (26).

La vraie valeur de z est évidemment toujours moindre que celle qui se déduit de (24), elle est ainsi inférieure au maximum donné par (25); au contraire, elle est plus grande que la valeur (26) cor-

respondante à la seconde hypothèse. Mais, dans le cas-limite où les deux hypothèses donnent la même valeur de P, on voit que la vraie valeur de z est plus rapprochée de la valeur (26) que de la valeur (24); car l'addition du triangle HEe au trapèze HBFe recule évidemment plus vers le haut le centre de gravité et le point d'application de la poussée du vrai prisme de plus grande poussée, que ces points ne sont repoussés vers le bas par l'addition du triangle FEK au triangle HBK. On remarquera à ce propos qu'au cas-limite, les deux triangles additifs que l'on vient d'indiquer sont sensiblement égaux entre eux.

Fig. 136.



En outre, la formule (26) sera suffisamment exacte toutes les fois que le rapport $\frac{h}{H}$ dépassera certaines limites de petitesse ou de grandeur, parce qu'alors le vrai prisme de plus grande poussée est de section triangulaire.

Si maintenant nous faisons abstraction de cette plus grande exactitude de la formule (26) par rapport à (24) dans tous les cas, et que nous adoptions pour vraie valeur de z la moyenne arithmétique entre (26) et le maximum de (24), c'est-à-dire entre (26) et (25), nous aurons incontestablement une hauteur plus grande que ce qu'aurait fourni un calcul rigoureux dans chaque cas.

La moyenne $\frac{1}{2}$ (0,458+0,333) = 0,395, ou, en nombres ronds, 0,40. Nous poserons ainsi :

$$z = 0{,}40\ (H + a \tang \alpha) = 0{,}40\ (H + nH \tang \alpha) \qquad (27)$$

C'est à cette expression que nous aurons recours désormais, dans tous les cas, pour la hauteur du point d'application de la force P au-dessus du point le plus bas B du mur.

§ 87. Formules pour assurer contre le renversement les murs de soutènement à parement extérieur vertical.

Nous supposons que le parement extérieur AD du mur de soutènement est vertical comme le parement intérieur BC. AB = DC = a. Pour assurer au mur une suffisante résistance contre le renversement, nous déterminerons son épaisseur de telle sorte que le renversement autour de l'arête extérieure A se produise sous l'action d'un multiple déterminé de la poussée P. Le coefficient de ce multiple sera déterminé par la pratique antérieure.

Soit maintenant w_1 le poids spécifique de la maçonnerie, et k le nombre par lequel il faut multiplier la poussée des terres P pour amener le renversement, ou le *coefficient de stabilité contre le renversement.*

Le moment du poids aw_1H du mur par rapport au point A égale $\frac{1}{2}w_1 a^2$H, le moment de la composante verticale de la force kP est kaR, et celui de la composante horizontale de kP est kzQ, ou

0,40. k. (H+nH tang α). Q. Ce qui donne l'équation

$$\frac{1}{2}w_1 a^2 \mathrm{H} + ka\mathrm{R} = 0{,}40 \,.\, k(\mathrm{H} + n\mathrm{H} \tan\alpha)\mathrm{Q}\,;$$

d'où
$$a = -\frac{k\mathrm{R}}{w_1\mathrm{H}} + \sqrt{\left(\frac{k\mathrm{R}}{w_1\mathrm{H}}\right)^2 + \frac{0{,}80.k(1+n\tan\alpha\ \mathrm{Q}}{w_1}}. \qquad (28)$$

L'épaisseur a se déduira de cette formule, dans laquelle on substituera, suivant la valeur de $\frac{h}{\mathrm{H}}$, les expressions de Q et R données par les formules (10), ou les expressions Q′, R′ données par (17) et (18), et correspondant à la seconde hypothèse. Les formules en Q′, R′ de la seconde hypothèse coïncident avec celles qui donnent Q, R, quand $\frac{h}{\mathrm{H}}$ atteint la valeur donnée par (20); pour les valeurs plus grandes de $\frac{h}{\mathrm{H}}$ les expressions Q′, R′ conservent une valeur constante. On pourrait donc se borner aux formules Q, R, en calculant les forces Q, R d'après ces formules, tant que $\frac{h}{\mathrm{H}}$

est au-dessous de la valeur (20), et conservant pour les valeurs plus grandes de $\frac{h}{H}$ les valeurs maximum qui répondent à (20).

Toutefois les expressions Q′, R′ ont cette utilité, qu'on peut s'en servir sans discussion dans tous les cas où elles sont sûrement applicables, c'est-à-dire quand $h > \frac{7}{8}$ H (voir équation 22). Dans ce cas, si l'on voulait appliquer les autres formules, on serait obligé à un calcul bien plus long, puisqu'il faudrait d'abord calculer le maximum de $\frac{h}{H}$ (20), et ensuite chercher les valeurs à appliquer des grandeurs Q et R, enfin substituer ces dernières dans (28).

Pour les très-petites valeurs de $\frac{h}{H}$, pour lesquelles, d'après le tableau I, $h < a \operatorname{tang} \alpha$ ou $\frac{h}{H} < n \operatorname{tang} \alpha$, on remplacera dans (28) $n \operatorname{tang} \alpha$ par $\frac{h}{H}$ et l'on prendra pour Q et R les expressions (10).

Dès lors, pour les petites valeurs de $\frac{h}{H}$ qui satisfont à la condition (23), l'équation (28) donnera

$$a = H\left(1+\frac{h}{H}\right)\left\{-k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right).r + \sqrt{\left[k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)r\right]^2 + 0{,}80.k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)q}\right\}. \quad (29)$$

Si h dépasse la valeur qu'on vient de dire, mais est inférieur à la valeur qui résulte de (20) ou du tableau II,

$$a = H(1+n \operatorname{tang} \alpha)\left\{-k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{2h}{H}-n \operatorname{tang} \alpha\right).r\right.$$
$$\left. + \sqrt{\left[k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{2h}{H}-n \operatorname{tang} \alpha\right)r\right]^2 + 0{,}80.k\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{2h}{H}-n \operatorname{tang} \alpha\right)q}\right\}. \quad (30)$$

Enfin, pour les valeurs plus grandes de $\frac{h}{H}$,

$$a = H(1+n \operatorname{tang} \alpha)\left\{-k\frac{w}{w_1}(1+n \operatorname{tang} \alpha).r'\right.$$
$$\left. + \sqrt{\left[k\frac{w}{w_1}(1+n \operatorname{tang} \alpha)r'\right]^2 + 0{,}80.k\frac{w}{w_1}(1+n \operatorname{tang} \alpha)q'}\right\}. \quad (31)$$

Les grandeurs q, r, q', r' qui entrent dans ces formules ont les valeurs tirées de (6) et de (15) et sont seulement fonctions des angles φ et α.

§ 88. Détermination du coefficient n et du coefficient de stabilité k d'après Vauban.

Il faut maintenant trouver le coefficient n qui représente, dans les cas les plus défavorables, le rapport de l'épaisseur a à la hauteur H du mur, et que nous avons supposé plus haut égal à $\frac{1}{3}$. Il faut recourir pour cela à la formule (31) qui répond aux plus hautes charges. Supposons un massif de hauteur indéfinie, pour lequel $\varphi = \alpha = 45°$; c'est incontestablement le cas qui dans la réalité exigera le mur de soutènement le plus épais. Admettons en outre comme coefficient de stabilité $k = 2$, en sorte qu'il faille doubler la poussée des terres pour renverser le mur; faisons le rapport des poids spécifiques de la terre et de la maçonnerie $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, ce qui est le cas ordinaire; l'équation (31) devient alors, si l'on y fait en outre $n = \frac{1}{3}$,

$$a = 0{,}40.\mathrm{H}.$$

Nous trouvons 0,40 au lieu de 0,33; mais aussi nous nous sommes placé dans le cas le plus défavorable, cas très-rare, et même alors l'erreur relative n'est que de $\frac{1}{6}$, et ne constitue que la vingt-quatrième partie à peu près de la hauteur totale $\mathrm{H} + a \operatorname{tang} \alpha$; en outre, dans les simplifications successives auxquelles nous avons eu recours, nous avons été conduit à surépaissir notablement le mur. Nous sommes donc autorisé à n'admettre pour n aucune valeur plus grande que $\frac{1}{3}$, afin de ne pas augmenter sans utilité les épaisseurs.

Pour reconnaître, du reste, combien faible est l'importance de ce coefficient sur le résultat final, prenons pour un instant $n = 0{,}4$, en conservant les autres données : on trouve alors $a = 0{,}42.\mathrm{H}$, valeur bien peu différente de $a = 0{,}40.\mathrm{H}$, qui correspondait à $n = \frac{1}{3}$.

Il importe d'examiner à quel degré concordent les résultats des formules ci-dessus avec ceux de Vauban que la pratique a consacrés : cette concordance servira à justifier l'adoption du coefficient

de stabilité $k=2$. Nous appliquerons à cet effet les formules au profil pris comme type par M. Poncelet aux paragraphes 18 et 20 de l'ouvrage déjà cité : $H=10^m$, $h=2^m$ et l'épaisseur du mur $a=0{,}342.h$ d'après la règle de Vauban. Il est à remarquer que Vauban admettait, en établissant sa règle, $\varphi=\alpha=45°$ et $\frac{w}{w_1}=\frac{2}{3}$. Comme ici $\frac{h}{H}=0{,}20$, il y a lieu d'appliquer la formule (29) qui s'applique aux faibles surcharges. La formule (29) donne $a=0{,}351.H$, résultat qui concorde d'une manière très-satisfaisante avec la règle de Vauban, et qui indique un choix convenable du coefficient de stabilité.

Pour $n=\frac{1}{3}$ et $k=2$, les formules (29), (30) et (31) deviennent :

$$a=H\left(1+\frac{h}{H}\right)\left\{-2\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)r+\sqrt{\left[2\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)r\right]^2+1{,}6.\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)q}\right\}. \tag{32}$$

$$a=H\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)\left\{-2\frac{w}{w_1}\left(1+2\frac{h}{H}-\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)r\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left[2\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{2h}{H}-\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)r\right]^2+1{,}6.\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{2h}{H}-\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)q}\right\}. \tag{33}$$

$$a=H\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)\left\{-2\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)r'\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left[2\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)r'\right]^2+1{,}6.\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)q'}\right\}, \tag{34}$$

Si la terre et la maçonnerie sont telles que $\frac{w}{w_1}=\frac{2}{3}$ et $\varphi=45°$, et si le talus extérieur des terres est fait égal au talus naturel, de sorte que $\alpha=45°$ aussi, on a $q=r=\frac{1}{16}$ et $q'=r'=\frac{1}{4}$; et les formules (32), (33), (34) deviennent :

$$a=\frac{H}{12}\left(1+\frac{h}{H}\right)^2\left\{-1+\sqrt{1+\frac{9{,}6}{1+\frac{h}{H}}}\right\}, \tag{35}$$

$$a=\frac{2}{27}H\left(1+\frac{3h}{H}\right)\left\{-1+\sqrt{1+\frac{14{,}4}{1+\frac{3h}{H}}}\right\}, \tag{36}$$

$$a=0{,}40.H. \tag{37}$$

Les données $\frac{w}{w_1}=\frac{2}{3}$ et $\varphi=45°$ sont celles qu'on adopte d'ordi-

naire ; cependant je les crois trop faibles dans beaucoup de cas d'application. Partout où l'on n'aura pas d'exemple de succès complet dans l'application de ces nombres (les cas spéciaux mis à part, tels que massif détrempé, vibrations communiquées au remblai, etc.) il sera sage, à défaut d'expériences directes déterminant $\frac{w}{w_1}$, φ et α, de poser $\frac{w}{w_1}=\frac{4}{5}$, $\alpha=\varphi=30°$.

On tire de là

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\alpha &= 0{,}5774, \\ q &= 0{,}129, \\ r &= 0{,}074, \\ q' &= 0{,}375, \\ r' &= 0{,}216, \end{aligned}$$

et les formules (32), (33), (34), répondant au coefficient de stabilité $k=2$, deviennent :

$$a=0{,}119\ .\ \mathrm{H}\ .\ \left(1+\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^2\left\{-1+\sqrt{1+\frac{11{,}78}{1+\frac{h}{\mathrm{H}}}}\right\}, \tag{38}$$

$$a=0{,}114.\mathrm{H}.\left(1+2{,}48.\frac{h}{\mathrm{H}}\right)\left\{-1+\sqrt{1+\frac{14{,}59}{1+2.48.\frac{h}{\mathrm{H}}}}\right\}, \tag{39}$$

$$a=0{,}536.\mathrm{H}. \tag{40}$$

§ 89. Calcul des quantités auxiliaires qui entrent dans les formules générales.

Dans les formules qui précèdent entrent des sinus, cosinus et tangentes diversement combinés. On pourrait sans doute exprimer les sinus et cosinus en fonction des tangentes, ou éliminer ces dernières au contraire ; on pourrait ainsi se passer de tables auxiliaires, mais les formules deviendraient d'un usage fort incommode. Le maniement des fonctions circulaires devient fort simple au moyen de tables donnant ces quantités sans passer par les logarithmes. Les calculateurs n'ont pas de semblables tables sous la main : nous croyons devoir en donner ici un abrégé.

TABLEAU III.

Table des sinus, cosinus et tangentes, de degré en degré.

Le rayon est

ANGLES en degrés.	SINUS.	COSINUS.	TANGENTES	ANGLES en degrés	SINUS.	COSINUS.	TANGENTES
0	0,0000	1,0000	0,0000	45	0,7071	0,7071	1,0000
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0.9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0.9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0.9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0.9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0.2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0, 588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0 8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0.3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0.8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0.4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0.5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0.6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0.9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0.1908	5.1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0.5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0.7986	0.7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0.6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4300
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0 9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0.9557	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0.7071	1,0000	90	1,0000	0,0000	∞

Au moyen de cette table on peut former la suivante qui donne, en fonction de φ et de α, les valeurs des quantités dépendant de ces deux angles et qui entrent dans les formules ; quantités indépendantes de $\frac{w}{w_1}$, k et $\frac{h}{H}$.

TABLEAU IV.

Valeurs de q, r, q', r', pour différentes valeurs de φ et α.

φ	α	$\frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\varphi}$	FORMULES (32), (33).		FORMULE (34).		FORMULE 19 $\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{r'}{r}$.	MAXIMUM de $\frac{h}{H}$, tiré de (23), limitant l'application de la formule (32).	VALEUR de $\frac{h}{H}$, tirée de (19), donnant le maximum de la poussée.
			q	r	q'	r'			
0°	0°	1	0,5	0	0,5	0	1	0	0
15°	0°	0	0,25	0,067	0,25	0,067	1	0	0
	7°+38′	$\frac{1}{2}$	0,25	0,067	0,294	0,079	1,178	0,045	0,137
	15°	1	0,25	0,067	0,466	0,125	1,866	0,089	0,561
30°	0°	0	0,129	0,074	0,129	0,074	1	0	0
	16°+6′	$\frac{1}{2}$	0,129	0,074	0,167	0,096	1.294	0,096	0,258
	30°	1	0,129	0,074	0,375	0,216	2,914	0,192	1,333
45°	0°	0	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	1	0	0
	26°+34′	$\frac{1}{2}$	0,0625	0,0625	0,086	0,086	1,373	0,167	0,384
	45°	1	0,0625	0,0625	0,25	0,25	4	0,333	2,333
60°	0°	0	0,025	0 044	0,025	0,044	1	0	0
	40°+54′	$\frac{1}{2}$	0,025	0,044	0,036	0,062	1,425	0,289	0,562
	60°	1	0,025	0,044	0,125	0,216	4,960	0,577	3,701

Si l'on veut appliquer par interpolation cette table au calcul d'un cas qui n'y soit pas explicitement compris, on devra observer :

Que la valeur de q diminue continûment quand φ varie de 0 à 90° ;

Que r atteint son maximum 0,115 approximativement pour $\varphi = 25° + 55'$;

Que q' et r', pour une valeur donnée de φ, sont d'abord respectivement égaux à q et r quand $\alpha = 0$, puis croissent avec α, jusqu'à ce que α atteigne son maximum φ ;

Que le maximum de q' répond aux valeurs simultanées $\varphi = 0$, $\alpha = 0$; le maximum de r' aux valeurs $\varphi = 45°$, $\alpha = 45°$;

Enfin que le rapport $\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}$ pour une valeur donnée de φ, égale 1 pour $\alpha = 0$, augmente avec α, devient maximum pour $\alpha = \varphi$, et que ce maximum est le plus grand possible et égal à 5,828 pour $\varphi = 90°$, $\alpha = 90°$.

§ 90. Calcul de l'épaisseur des murs pour des valeurs particulières des variables.

Dans le cas particulier où $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$ et $k = 2$, la substitution des valeurs du tableau IV dans les équations (32), (33), (34) permet de dresser le tableau suivant d'épaisseurs de mur dans diverses conditions :

TABLEAU V.

Épaisseur du mur *a* au point de vue de la résistance au renversement.

φ	α	$\frac{h}{H}$	ÉPAISSEUR *a* en fractions de la hauteur *h*.	FORMULE qui a servi au calcul.
0°	0°	0	0,730	(32)
15°	0°	0	0,435	(32)
	7°+ 38′	0,137 jusqu'à ∞	0,494	(33) ou (34)
	15°	0,25	0,545	(33)
		0,561 jusqu'à ∞	0,628	(33) ou (34)
30°	0°	0	0,285	(32)
	16°+ 6′	0,25	0,353	(33)
		0,258 à ∞	0,355	(33) ou (34)
	30°	0,25	0,375	(33)
		0,5	0,419	(33)
		1	0,481	(33)
		1,333 à ∞	0,511	(33) ou (34)
45°	0°	0	0,188	(32)
	26°+ 34′	0,25	0,242	(33)
		0,384 à ∞	0,256	(33) ou (34)
	45°	0,25	0,253	(32)
		0,333	0,276	(32) ou (33)
		0,5	0,296	(33)
		1	0,339	(33)
		1,5	0,368	(33)
		2	0,388	(33)
		2,333 à ∞	0,399	(33) ou (34)
60°	0°	0	0,115	(32)
	40°+ 54′	0,25	0,154	(32)
		0,5	0,175	(33)
		0,562 à ∞	0,178	(33) ou (34)
	60°	0,25	0,154	(32)
		0,5	0,196	(32)
		1	0,235	(33)
		2	0,270	(33)
		3	0,288	(33)
		3,701 à ∞	0,297	(33) ou (34)

On voit par là que le mur doit être d'autant plus épais que l'angle du talus naturel φ est moindre, et que l'angle du talus extérieur α est plus grand, celui-ci étant limité à la valeur φ; c'est-à-dire que l'épaisseur du mur doit être d'autant plus grande que le massif se rapproche de la fluidité : pour $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, la terre est à l'état de fluidité parfaite ; on doit porter alors l'épaisseur du mur à 0,73. H, ce qui est le double de la dimension adoptée ordinairement pour le soutènement des terres à forte surcharge.

Toutes ces épaisseurs, qui sont plus grandes que $\frac{1}{3}$ H, exigent une correction, étant déduites des équations (33) ou (34) et non de (32); car on a posé pour abréger CH $= a$ tang $\alpha = n$ H tang a $= \frac{1}{3}$ H tang α; d'où $a = \frac{1}{3}$ H. On peut dans ce cas substituer à la place de n la valeur donnée par la table précédente dans l'équation (30) ou (31), et refaire le calcul de l'épaisseur a avec la formule modifiée.

On trouve ainsi, par exemple :

Pour $\varphi = 15°$, $\alpha = 15°$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}628$. H, la valeur corrigée 0,716. H ; pour $\varphi = 30°$, $\alpha = 30°$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}511$. H, la valeur corrigée 0,563. H; pour $\varphi = 45°$, $\alpha = 45°$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}399$. H, la valeur corrigée 0,419. H.

Mais on pourra dans tous les cas pratiques éviter ce calcul de correction assez pénible, en admettant la formule empirique,

$$n' = n + \frac{1}{4}(n - 0{,}3), \tag{41}$$

liant la valeur n' à adopter à la valeur n fournie par un premier calcul. La formule (41) donne, dans les trois exemples précédents :

pour $n = 0{,}628$,	$n' = 0{,}710$	au lieu de	$n' = 0{,}716$;
» $n = 0{,}511$,	$n' = 0{,}564$	»	$n' = 0{,}563$;
» $n = 0{,}399$,	$n' = 0{,}424$	»	$n' = 0{,}419$.

On a déjà observé que, bien que le plus souvent le talus naturel des terres, φ, soit en réalité voisin de 45° ou même plus grand encore, il y a aussi des cas où il peut être notablement moindre, par exemple dans le sable pur ou dans les massifs fortement détrempés. Plus φ est petit, plus le mur doit être épais.

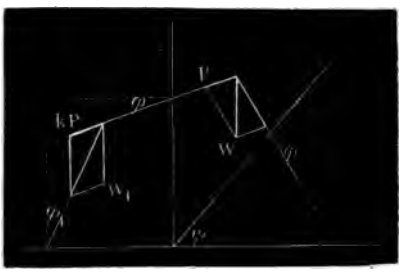
De même le rapport $\frac{w}{w_1}$ peut, pour certaines matières, être plus grand que la valeur $\frac{2}{3}$ prise pour base dans le tableau V; ce qui nécessiterait une surépaisseur du mur.

Enfin dans le cas où le massif serait exposé à de forts ébranlements, comme les remblais de chemin de fer, on devrait prendre le *coefficient* de stabilité k plus grand que 2 et le porter à 3 au moins.

§ 91. Formules pour assurer les murs de soutènement contre le glissement.

Pour que le mur ne soit pas poussé en avant par la pression sur sa base BA supposée horizontale, il faut que la résultante de la poussée P des terres et du poids W_1 du mur fasse avec la normale à BA, c'est-à-dire avec la verticale, un angle au plus égal à l'angle du frottement de la maçonnerie sur elle-même. Soit φ_1 cet angle de frottement : tang φ_1 est le *coefficient de frottement*.

Fig. 137.



On dispose de la stabilité du mur relative au glissement, en exprimant que le glissement aura lieu si l'on multiplie par k la poussée P : k est dit coefficient de stabilité. On compose kP et W_1 (fig. 137), et l'on a

$$\frac{kP}{W_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \varphi_1\right)} = \frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi + \varphi_1)},$$

ou
$$W_1 = kP.\frac{\cos(\varphi+\varphi_1)}{\sin\varphi_1} = kP\cos\varphi\,(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)$$
$$= kQ\,(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi).$$

On remplace W_1 par sa valeur $w_1 aH$, et l'on trouve :

$$a = \frac{kP}{w_1 H}\cdot\frac{\cos(\varphi+\varphi_1)}{\sin\varphi_1} = \frac{kQ}{w_1 H}(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi). \qquad (42)$$

Si l'on a $\varphi + \varphi_1 > 90°$, ou tang φ. tang $\varphi_1 > 1$, a est négatif, c'est-à-dire que le mur ne devrait avoir aucun poids ; il devrait être poussé verticalement au contraire de bas en haut, pour que la résultante de kP et de W_1 fût inclinée sur la verticale suivant l'angle de frottement φ_1. Dans ce cas, où la direction de la poussée des terres P est plus inclinée déjà sur l'horizon que ne doit l'être la résultante,

aucun accroissement de la poussée, ou aucun multiple kP ne donnera lieu à une inclinaison moindre sur l'horizontale ; à plus forte raison l'introduction d'un poids vertical W_1 agissant de haut en bas ne saurait-elle conduire à une moindre inclinaison.

Dans la pratique, on admettra, pour des matériaux débrutis avec soin : comme minimum tang $\varphi_1 = 0{,}60$, d'où $\varphi_1 = 31°$ et cot $\varphi_1 = 1{,}667$; et comme maximum tang $\varphi_1 = 0{,}75$, d'où $\varphi_1 = 37°$ et cot $\varphi_1 = 1{,}333$.

Quand le mortier est frais, ces valeurs peuvent transitoirement devenir tang $\varphi_1 = 0{,}50$, $\varphi_1 = 27°$ et cot $\varphi_1 = 2$. Si l'on fait le remblai derrière le mur alors seulement que le mortier a subi un premier durcissement, l'adhésion du mortier élèvera le pouvoir de résistance au glissement à une valeur supérieure au maximum ci-dessus. Comme cette précaution est ordinairement prise, le glissement du mur sur sa base n'est possible que si l'angle φ du talus naturel des terres est plus petit que 59° pour la valeur minimum de φ_1, $\varphi_1 = 31°$, et plus petit que 53° pour la valeur maximum de $\varphi_1 = 37°$.

Si ce cas se produit, on remplacera dans (42) Q par sa valeur tirée de (8), (10) ou (17), suivant que l'une ou l'autre des formules (29), (30), (31) sera applicable à la recherche de la stabilité contre la rotation, et l'on établira les formules suivantes :

$$a = kq\,\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)^2(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H, \tag{43}$$

$$a = kq\,\frac{w}{w_1}(1+n\operatorname{tang}\alpha)\left(1+\frac{2h}{H}-n\operatorname{tang}\alpha\right)(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H, \tag{44}$$

$$a = kq'\,\frac{w}{w_1}(1+n\operatorname{tang}\alpha)^2(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H. \tag{45}$$

On ne devra donner au mur l'épaisseur a donnée par ces formules que si elles donnent un nombre plus grand que les formules (29), (30), (31). Dans le cas contraire, c'est cette dernière épaisseur que l'on adoptera, et le mur sera alors plus stable contre le glissement que contre le renversement.

Pour faire cette comparaison on donnera à k dans les formules correspondantes la même valeur, car il n'y a pas de raison pour rendre le mur plus stable contre le renversement que contre le glissement, ou inversement. Si l'on donne à k la valeur 2 reconnue convenable dans la pratique, et qu'on fasse $n = \frac{1}{5}$, les formules qui précèdent deviennent :

$$a = 2q\,\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{h}{H}\right)^2(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H, \tag{46}$$

$$a = 2q\,\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)\left(1+\frac{2h}{H}-\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H, \tag{47}$$

$$a = 2q'\,\frac{w}{w_1}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha\right)^2(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi)H. \tag{48}$$

Si l'on fait, pour maçonnerie et terre ordinaire, $\varphi = 45°$, $\alpha = 45°$, $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, $\varphi_1 = 35°$, d'où $\operatorname{tang}\varphi_1 = 0{,}70$ et $\cot\varphi_1 = 1{,}43$; on trouve $q = \frac{1}{16}$, $q' = \frac{1}{4}$, et

$$a = 0{,}0358\left(1+\frac{h}{H}\right)^2 H, \tag{49}$$

$$a = 0{,}0319\left(1+3\frac{h}{H}\right)H, \tag{50}$$

$$a = 0{,}255\ H. \tag{51}$$

Pour les nombres $\varphi = 30°$, $\alpha = 30°$, $\frac{w}{w_1} = \frac{4}{5}$, $\varphi_1 = 35°$, on a $q = 0{,}129$, $q' = 0{,}375$ et les formules (46), (47), (48) deviennent

$$a = 0{,}1757\left(1+\frac{h}{H}\right)^2 H, \tag{49 a}$$

$$a = 0{,}1692\left(1+2{,}48.\frac{h}{H}\right)H, \tag{50 a}$$

$$a = 0{,}726.\ H \tag{51 a}$$

§ 92. Calcul de l'épaisseur des murs pour des valeurs particulières des variables.

On a calculé, en s'aidant du tableau IV ci-dessus, le tableau suivant qui donne pour diverses valeurs des variables les épaisseurs déduites de (46), (47), (48), pour $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, $k = 2$ et $\operatorname{tang}\varphi_1 = 0{,}70$.

TABLEAU VI.

Épaisseur du mur a au point de vue de la résistance au glissement.

φ	α	$\frac{h}{H}$	ÉPAISSEUR a en fractions de la hauteur H.	FORMULE qui a servi au calcul.
0°	0°	0	0,953	(46)
15°	0°	0	0,387	(46)
	7°+ 38′	0,137 jusqu'à ∞	0,497	(47) ou (48)
	15°	0,25	0,595	(47)
		0,561 jusqu'à ∞	0,858	(47) ou (48)
30°	0°	0	0,147	(46)
	16°+ 6′	0,25	0,226	(47)
		0,258 à ∞	0,228	(47) ou (48)
	30°	0,25	0,229	(47)
		0,5	0,316	(47)
		1	0,491	(47)
		1,333 à ∞	0,606	(47) ou (48)
45°	0°	0	0,036	(46)
	26°+ 34′	0,25	0,056	(47)
		0,384 à ∞	0,067	(47) ou (48)
	45°	0,25	0,056	(46)
		0,333	0,064	(46) ou (47)
		0,5	0,080	(47)
		1	0,127	(47)
		1,5	0,175	(47)
		2	0,223	(47)
		2,333 à ∞	0,255	(47) ou (48)

L'épaisseur du mur est d'autant plus grande que l'angle φ du talus naturel est plus petit, et que l'angle α du talus effectif extérieur est plus grand, ce dernier étant d'ailleurs au plus égal à φ. Pour une terre parfaitement fluide on aurait $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, et l'épaisseur serait la plus forte, 0,953. H. Pour $\varphi_1 = 35°$, dès que φ dépasse 55°, complément de 35°, a devient négatif, ce qui montre que la plus grande poussée des terres ne saurait amener le glissement du mur.

Pour des motifs déjà connus, il est nécessaire de corriger les épaisseurs de mur qui sont données non par la formule (46), mais par (47) ou (48), et qui s'écartent notablement de $\frac{1}{3}$ H : à cet effet on remplacera n par le coëfficient trouvé, dans (44) ou (45), et l'on en déduira une nouvelle valeur de a. On aura ainsi, par exemple, les résultats suivants :

Pour $\varphi = 15°$, $\alpha = 7° + 38'$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}497$. H, la valeur corrigée est $a = 0{,}499$. H ;

Pour $\varphi = 15°$, $\alpha = 15°$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}858$. H, la valeur corrigée est $a = 0{,}902$. H ;

Pour $\varphi = 30°$, $\alpha = 30°$, $\frac{h}{H} = \infty$, au lieu de $a = 0{,}608$. H, la valeur corrigée est $a = 0{,}657$. H.

Les limites entre lesquelles varie l'épaisseur du mur dans le tableau précédent sont relativement plus étendues que celles du tableau V. Cela vient de ce qu'il faut toujours donner un poids plus grand au mur pour réduire dans un rapport donné l'angle que fait avec la verticale la résultante de kP et de W_1, que pour réduire dans le même rapport la tangente de cet angle. Or la première de ces deux opérations se présente pour l'équilibre de glissement, la seconde pour l'équilibre de rotation.

§ 93. Comparaison des résultats des tableaux V et VI.

On voit, en comparant les tableaux V et VI, que dans un grand nombre de cas de la pratique, la considération du glissement exige une moindre épaisseur que celle du renversement ; mais dans d'autres cas le contraire a lieu, et lorsque l'angle du talus naturel φ est plus petit que 45°, et qu'on a en même temps $\frac{w}{w_1} > \frac{2}{3}$ et tang $\varphi_1 < 0{,}70$, il est essentiel de comparer les deux épaisseurs afin de choisir la plus grande. La condition générale pour que l'épaisseur relative au glissement soit moindre que l'épaisseur relative au renversement, de sorte qu'on n'ait à s'occuper que de la dernière, est d'après (42) et (28)

$$\frac{kQ}{w_1 H}(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi) < -\frac{kR}{w_1 H} + \sqrt{\left(\frac{kR}{w_1 H}\right)^2 + \frac{0{,}8 . k(1 + n \operatorname{tang}\alpha) Q}{w_1}} ;$$

d'où l'on tire, en plaçant R par Q tang φ,

$$\frac{5}{4} k \frac{Q}{w_1 H^2} \cdot \frac{\cot^2\varphi_1 - \operatorname{tang}^2\varphi}{1 + n \operatorname{tang}\alpha} < 1. \qquad (52)$$

Dans cette inégalité on doit mettre pour Q, suivant la circonstance, sa valeur tirée de (10), de (8) ou de (17). Si l'on choisit la plus grande

de ces trois valeurs, qui est (17), on voit que si la condition est remplie pour cette valeur de Q, elle le sera à plus forte raison pour les valeurs plus petites de Q, qui répondent à la même valeur de φ mais à un rapport $\frac{h}{H}$ plus petit. Notre inégalité devient, en y introduisant la valeur (17),

$$\frac{5}{4} k \frac{w}{w_1} q'(1 + n \operatorname{tang} \alpha)(\cot^2 \varphi_1 - \operatorname{tang}^2 \varphi) < 1. \qquad (53)$$

q' augmente avec α, ainsi que le facteur $(1 + n \operatorname{tang} \alpha)$: la valeur maximum de α, qui est φ, donnera donc, toutes choses égales d'ailleurs, au premier membre de l'inégalité sa plus grande valeur. Si l'inégalité est vérifiée pour $\alpha = \varphi$, elle le sera à plus forte raison pour toute valeur moindre de α. Pour $\alpha = \varphi$, l'inégalité devient

$$\frac{5}{8} k \frac{w}{w_1} \frac{(1 + n \operatorname{tang} \varphi)(\cot^2 \varphi_1 - \operatorname{tang}^2 \varphi)}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi} < 1. \qquad (54)$$

Pour $k = 2$, $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tang} \varphi_1 = 0{,}70$, cette condition devient :

$$\frac{5}{6} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tang} \varphi\right)(2{,}0449 - \operatorname{tang}^2 \varphi)}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi} < 1.$$

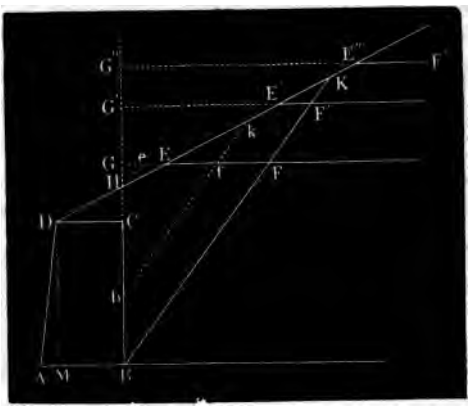
Cette dernière condition est satisfaite tant que φ est plus grand que 36° : ainsi, quand le talus naturel du terrain donné fait avec l'horizontale un angle plus grand que 36°, la stabilité contre le glissement exige une moindre épaisseur que la stabilité contre le renversement, quelles que soient les valeurs de α et de $\frac{h}{H}$. Il est clair que si l'on a $k > 2$, ou $\frac{w}{w_1} > \frac{2}{3}$, ou $\operatorname{tang} \varphi_1 < 0{,}70$, l'angle du talus naturel φ devrait dépasser une limite supérieure à 36° pour vérifier la condition ci-dessus indépendamment de α et de $\frac{h}{H}$.

§ 94. Formules pour garantir du renversement les murs de soutènement à parement extérieur incliné.

Nous admettons maintenant que le parement extérieur DA (fig. 138) du mur de soutènement a un fruit ; conservant les autres

notations antérieures, nous nommons b l'épaisseur en couronne CD du mur, et m le rapport du fruit total AM à la hauteur MD, ou la tangente de l'angle ADM.

Fig. 138.



Ainsi $\overline{AM} = mH$ et $\overline{AB} = mH + b$.

On veut que la poussée des terres P soit multipliée par k pour renverser le mur autour du point A : le moment du poids de MBCD est $\left(mH + \frac{b}{2}\right) w_1 bH$; celui du poids de AMD est

$$\left(\frac{2}{3}mH\right)\left(\frac{1}{2}w_1 mH^2\right);$$

le moment de la composante verticale kR est $(mH + b) . kR$; celui de la composante horizontale kQ est

$$0{,}40\ (H + nH \operatorname{tang} \alpha)\, kQ.$$

L'équation des moments est donc

$$\frac{w_1}{3} m^2 H^3 + w_1 bH\left(mH + \frac{b}{2}\right) + k(mH + b)R = 0{,}40 . k(H + n \operatorname{tang} \alpha)Q;$$

d'où l'on tire

$$b = -\left(\frac{kR}{w_1 H} + mH\right) + \sqrt{\left(\frac{kR}{w_1 H}\right)^2 + \frac{0.80 . k\ (1 + n \operatorname{tang} \alpha)Q}{w_1} + \frac{m^2 H^2}{3}}. \quad (55)$$

On peut mettre cette expression sous cette forme :

$$b = H\left\{-\left(\frac{kR}{w_1 H^2} + m\right) + \sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{kR}{w_1 H^2}\right)^2 + \frac{0{,}80\ k(1 + n \operatorname{tang} \alpha Q}{w_1 H^2}}\right]^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}\right\};$$

ou, pour abréger :

$$b = H\left(-A + \sqrt{B^2 + C^2}\right).$$

Faisons $k = 2$; $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, $\alpha = 0$, $\varphi = 60°$; admettons que $Q = qwH^2$, $R = rwH^2$, tirés de (10. a), soient les valeurs limites auxquelles correspond, dans la pratique, la plus petite valeur possible de $B = \sqrt{\left(\frac{kR}{w_1 H^2}\right)^2 + \frac{0{,}80\ k(1 + n \operatorname{tang} \alpha)Q}{w_1 H^2}}$; admettons, d'autre part, que

$m = \frac{1}{6}$ est la plus grande valeur du fruit que l'on aura à considérer en pratique, en sorte qu'à cette valeur répondra la plus grande valeur possible de $C = \frac{m}{\sqrt{3}}$.

En substituant ces valeurs, on reconnaît que dans tous les cas pratiques B est plus grand que 2C, et est le plus souvent un très-grand multiple de C. Dans ces circonstances, nous aurons recours à un théorème de M. Poncelet, et nous poserons, avec une erreur qui ne dépasse pas $\frac{1}{71}$,

$$\sqrt{B^2 + C^2} = 0{,}9859.B + 0{,}2327.C.$$

Pour être sûr que l'erreur commise conduira à donner une plus grande stabilité, augmentons cette expression de $\frac{1}{71}$, et écrivons

$$\sqrt{B^2 + C^2} = B + 0{,}236.C.$$

La formule (55) devient ainsi :

$$b = -\frac{kR}{w_1 H} + \sqrt{\left(\frac{kR}{w_1 H}\right)^2 + \frac{0{,}80.k\,(1 + n \tang \alpha)\,Q}{w_1}} - 0{,}8638\,mH. \quad (56)$$

On posera ensuite $n = \frac{1}{3}$, ce qui est plus favorable encore à la stabilité que dans les cas précédents, et l'on remplacera Q et R par les valeurs (10), ou (8) et (9), ou (17) et (18), suivant les cas distingués plus haut.

Mais en comparant cette expression à celle de a dans (28), on voit que

$$b = a - 0{,}8638.\,mH \quad (57)$$

ou, en représentant par n le coefficient par lequel il faut multiplier la hauteur H pour avoir a (voir tableau V),

$$b = (n - 0{,}8638.\,m)\,H \quad (58)$$

Ces deux formules établissent une relation très-simple pour passer de l'épaisseur nécessaire au mur parementé verticalement à l'épaisseur du mur à parement incliné à l'extérieur.

La section du mur rectangulaire est $a\mathrm{H}=n\mathrm{H}^2$; celle du mur oblique est

$$\frac{1}{2}\mathrm{H}\,[a-0{,}8638.m\mathrm{H}+a+0{,}1362.m\mathrm{H}]$$

$=a\mathrm{H}-0{,}3638.m\mathrm{H}^2=(n-0{,}3638.m)\,\mathrm{H}^2$. D'où il suit que la transformation du premier type dans le second économise une fraction de la section du premier représentée par

$$0{,}3638\times\frac{m}{n}.$$

Nous avons dit que m ne doit pas être pris plus grand que $\frac{1}{6}$. Pour cette valeur maximum de m et la valeur moyenne de n $n=\frac{1}{3}$, la fraction qui représente l'économie devient $0{,}3638\times\frac{1}{2}=0{,}1819$, ou environ les $\frac{2}{11}$ de la maçonnerie du mur vertical; si l'on prend le fruit $m=\frac{1}{12}$, fréquemment adopté, l'économie est $\frac{1}{11}$ de la masse.

§ 95. Formules pour garantir du glissement les murs de soutènement à parement extérieur incliné.

Le poids du mur étant ici $\mathrm{W}_1=w_1\mathrm{H}\left(b+\frac{m\mathrm{H}}{2}\right)$, la condition pour que le glissement commence à s'opérer sous l'action de la poussée des terres P multipliée par un facteur k, devient

$$b=\frac{k\mathrm{Q}}{w_1\mathrm{H}}(\cot\varphi_1-\tang\varphi)-\frac{1}{2}m\mathrm{H}. \qquad (59)$$

ou, en tenant compte de l'expression (42) de l'épaisseur a du mur vertical,

$$b=a-\frac{1}{2}m\mathrm{H}, \qquad (60)$$

ou autrement :

$$b=\left(n-\frac{1}{2}m\right)\mathrm{H}. \qquad (61)$$

De cette relation il résulte que la section du mur oblique est la même que celle du mur vertical; ainsi, toutes les fois que la considération du glissement conduira à une épaisseur plus grande que

celle qui résulte de la considération du renversement, il n'y aura aucune économie de maçonnerie à employer le parement oblique, et le calcul devra se faire simplement pour le mur vertical.

Ce résultat pouvait être prévu, car l'équilibre de glissement ne met en jeu que le poids même du mur, et n'est pas influencé par l'augmentation du moment de ce poids par rapport au point A.

On a seulement un avantage de détail : b étant plus petit que a, la hauteur CH, qui était égale à $a \operatorname{tang} \alpha$, et qui devrait être prise égale ici à $b \operatorname{tang} \alpha$, se trouvera ainsi plus petite, et donnerait ainsi une poussée moins intense. Mais dans le calcul où nous avions mis $\frac{1}{3}\mathrm{H} \operatorname{tang} \alpha$ au lieu de $a \operatorname{tang} \alpha$, nous laisserons de même $\frac{1}{3}\mathrm{H} \operatorname{tang} \alpha$ au lieu de $b \operatorname{tang} \alpha$, ce qui sera favorable à la stabilité du mur.

§ 96. Influence de l'inclinaison des plans d'assises sur la stabilité contre le glissement.

Il est à remarquer qu'on peut obtenir de grands avantages au point de vue de l'équilibre de glissement en disposant les assises du mur non plus horizontalement, mais sous une certaine inclinaison ascendante de dedans en dehors. Ce mode de construction est surtout convenable lorsque le parement extérieur du mur n'est pas vertical, mais, comme nous l'avons supposé en dernier lieu, oblique; car alors les joints peuvent sans difficulté aboutir normalement sur le parement AD.

Représentons par β l'angle des joints avec l'horizon; exprimons que la résultante de KP et de W_1 fait l'angle φ_1 du frottement avec la normale au joint : nous aurons

$$\frac{k\mathrm{P}}{\mathrm{W}_1} = \frac{\sin(\varphi_1+\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\varphi_1-\beta\right)} = \frac{\sin(\varphi_1+\beta)}{\cos(\varphi+\varphi_1+\beta)}.$$

d'où

$$\mathrm{W}_1 = k\mathrm{P}\frac{\cos(\varphi+\varphi_1+\beta)}{\sin(\varphi_1+\beta)} = k\mathrm{Q}\left(\frac{1-\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\varphi_1+\operatorname{tang}\beta} - \operatorname{tang}\varphi\right); \quad (62)$$

et si au dénominateur, dans le second membre, on néglige $\operatorname{tang}\beta$ à côté de $\operatorname{tang}\varphi_1$, ce qui est favorable à la stabilité,

$$\mathrm{W}_1 = k\mathrm{Q}(\cot\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\beta). \quad (63)$$

Comme ici $$W_1 = w_1\left(b + \frac{mH}{2}\right)H,$$
on en tire :

$$b = \frac{kQ}{w_1 H}(\cot \varphi_1 - \tang \varphi - \tang \beta) - \frac{1}{2}mH; \qquad (64)$$

expression dans laquelle on doit remplacer Q, suivant les cas, par sa valeur tirée de (10), de (8) ou de (17). Mais dans tous les cas, en se reportant à (42), on voit que

$$b = a\left(1 - \frac{\tang \beta}{\cot \varphi_1 - \tang \varphi}\right) - \frac{1}{2}mH, \qquad (65)$$

Si les joints sont normaux au parement, tang $\beta = m$:

$$b = a\left(1 - \frac{m}{\cot \varphi_1 - \tang \varphi}\right) - \frac{1}{2}mH; \qquad (66)$$

ou, en posant $a = nH$:

$$b = \left(n - \frac{mn}{\cot \varphi_1 - \tang \varphi} - \frac{1}{2}m\right)H. \qquad (67)$$

Le profil d'un mur ainsi disposé est moindre que celui aH d'un mur de même stabilité contre le glissement et construit à joints horizontaux. La différence est représentée par la fraction

$$\frac{m}{\cot \varphi_1 - \tang \varphi}$$

du profil aH. Pour en apprécier l'importance numérique, faisons tang $\varphi_1 = 0{,}70$ d'où cot $\varphi_1 = 1{,}43$, et $\varphi = 45°$ d'où tang $\varphi = 1$.

$$b = \left(n - 2{,}326.mn - \frac{1}{2}m\right)H. \qquad (68)$$

La différence relative des profils est $2{,}326 \times m$. Pour $m = \frac{1}{6}$, $b = (0{,}612.n - 0{,}083)$ H et la différence est 0,388 ou $\frac{2}{5}$. Pour $m = \frac{1}{12}$, $b = (0{,}806.n - 0{,}042)$ H, et la différence des profils est 0,194 ou $\frac{1}{5}$ environ.

INSTRUCTION PRATIQUE

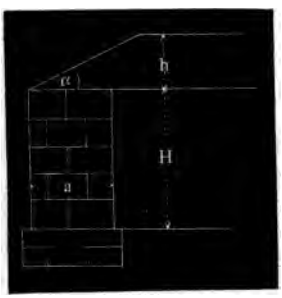
POUR L'EXÉCUTION DES MURS DE SOUTÈNEMENT

(Suivie dans le ressort de la direction des chemins de fer du duché de Brunswick.)

§ 97. Définition des quantités dont dépend l'épaisseur d'un mur de soutènement.

Pour déterminer l'épaisseur a d'un mur de soutènement, il faut connaître (fig. 139) :

Fig. 139.



φ angle du talus naturel du terrain qui est revêtu d'un mur de soutènement,

α angle du talus extérieur de la surcharge de terre,

H hauteur du mur de soutènement,

h hauteur de la surcharge,

$\frac{w}{w_1}$ rapport des poids spécifiques respectifs de la terre (w) et du mur (w_1),

φ_1 angle de frottement des pierres qui forment le mur,

k coefficient de stabilité, c'est-à-dire le facteur par lequel on doit multiplier la poussée réelle dans le calcul de l'épaisseur, de manière à parer aux éventualités fâcheuses.

§ 98. Valeurs moyennes des quantités ci-dessus définies.

En ce qui concerne l'angle φ, il faut autant que possible, dans chaque cas, le déterminer par expérience, en ayant égard aux circonstances locales, à la stratification, à l'abondance des eaux de fil-

tration, etc. Il ne servirait de rien de prendre une valeur moyenne : elle conduirait la plupart du temps à un inutile surcroît d'épaisseur, et souvent donnerait des murs trop faibles : on devra considérer dans chaque application le cas le plus défavorable qui puisse être prévu, eu égard aux circonstances locales.

Dans la plupart des cas pratiques, $\varphi = 45°$ est une valeur moyenne répondant aux bonnes natures de terrain.

a,H, h. Ces trois quantités sont données dans chaque cas particulier.

$\frac{w}{w_1}$. On prend ordinairement le rapport des poids spécifiques de la terre et de la maçonnerie égal à $\frac{2}{3}$: on ne s'éloigne guère ainsi de la vérité.

φ_1. Beaucoup d'expériences indiquent comme moyenne convenable pour l'angle de frottement de la maçonnerie $\varphi_1 = 35°$, ou tang $\varphi_1 = 0{,}70$; les valeurs de cet angle s'écartent peu de cette moyenne. Si l'on observe la précaution ordinaire consistant à ne remblayer derrière le mur que quand le mortier a commencé à faire prise, cette valeur de φ_1 assure dans l'application toute la sécurité désirable.

k. En comparant les résultats théoriques avec les murs de fortifitification construits par Vauban, on reconnaît que le coefficient de stabilité $k = 2$ assure aux murs de fortification la sécurité requise.

Ainsi, dans la plupart des cas où les murs de soutènement ont à supporter une surcharge de terre notable, et n'ont par suite à subir que de faibles secousses, on pourra se contenter du coefficient 2. Il faut alors qu'il n'y ait pas à craindre d'affaissement du remblai, et que la maçonnerie soit très-bien faite.

Dans les cas de surcharge nulle ou insignifiante, il est convenable de recourir au coefficient $k = 3$.

§ 99. Détermination de l'épaisseur a des murs de soutènement à profil rectangulaire pour $\frac{W}{W_1} = \frac{2}{3}$, tang $\varphi_1 = 0{,}70$, et $k = 2$.

Dans les deux tables suivantes, on prend pour bases $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$; tang $\varphi_1 = 0{,}70$; et $k = 2$. Ces tables donnent l'épaisseur a pour les

divers systèmes de valeur de l'angle φ du talus naturel, de l'angle α du talus extérieur de la surcharge, et du rapport $\frac{h}{H}$. L'épaisseur a est donnée en fraction de la hauteur H du mur de soutènement, savoir : par la table I en ce qui concerne la stabilité contre le renversement autour de l'arête inférieure du parement extérieur du mur, et par la table II en ce qui concerne la stabilité contre le glissement du mur sur sa base, c'est-à-dire sur ses fondations.

Dans chaque cas particulier, on comparera les deux valeurs de a répondant respectivement au renversement et au glissement, et l'on choisira la plus grande des deux.

Les valeurs de α : $26°+34'$, $33°+41',45°$ sont celles généralement usitées, et répondent aux talus dits à deux de base pour un de hauteur, à un et demi pour un, à un pour un.

TABLEAU I.

Épaisseur a du mur en vue du renversement $\left(k=2,\ \frac{w}{w_1}=\frac{2}{3}\right)$.

φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$
0	0	0	0,73
15°	0	0	0,44
	5°	0,083	
		jusqu'à ∞	0,52
	10°	0,1	0,54
		0,2	
		jusqu'à ∞	0,58
	15°	0.25	0,61
		0,561	
		jusqu'à ∞	0,71
20°	0	0	0,38
	5°	0,075	
		jusqu'à ∞	0,43
	10°	0,1	0,45
		0,172	
		jusqu'à ∞	0.48
	20°	0,25	0,52
		0,5	0,60
		0,795	
		jusqu'à ∞	0,66
25°	0	0	0,33
	5°	0,069	
		jusqu'à ∞	0,36
	15°	0,1	0,39
		0,264	
		jusqu'à ∞	0,44
	25°	0,25	0,45
		0,5	0,52
		1,063	
		jusqu'à ∞	0,62
30	0	0	0,29
	10°	0,139	
		jusqu'à ∞	0,33
	20°	0,1	0,33
		0,358	
		jusqu'à ∞	0,40
	26°+34′	0,25	0,39
		0,5	0,44
		0,653	
		jusqu'à ∞	0,47
	30°	0,25	0,40
		0,5	0,45
		1,0	0,53
		1,329	
		jusqu'à ∞	0,57

φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$
35°	0	0	0.25
	26°+34′	0,25	0,32
		0.514	
		jusqu'à ∞	0,38
	33°+41′	0.25	0.33
		0,5	0,39
		1,057	0,46
		jusqu'à ∞	
	35°	0.25	0,34
		0,5	0,39
		1,0	0,46
		1.639	
		jusqu'à ∞	0,52
40°	0	0	0.22
	26°+34′	0,20	0,27
		0,438	
		jusqu'à ∞	0,30
	33°+41′	0,25	0,29
		0,5	0,32
		0,729	
		jusqu'a ∞	0,35
	40°	0,25	0,29
		0,5	0,33
		1,0	0,40
		1,972	
		jusqu'à ∞	0,47
45°	0	0	0,19
	26°+34′	0,20	0,24
		0,384	
		jusqu'à ∞	0,26
	33°+41′	0,25	0,25
		0,594	0,29
		jusqu'à ∞	
	45°	0,25	0,26
		0,5	0,30
		1,0	0,34
		2.333	
		jusqu'à ∞	0,43
50°	0	0	0,16
	26°+34′	0,15	0,20
		0,343	
		jusqu'à ∞	0,22
	33°+41′	0,25	0,22
		0,508	
		jusqu'à ∞	0,24

φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$
50°	45°	0,25	0,22
		0.5	0,26
		1,073	
		jusqu'à ∞	0,30
	50°	0,25	0,22
		0,5	0,27
		1,0	0,31
		2,0	0,36
		2,731	
		jusqu'à ∞	0,38
55°	0	0	0,14
	26°+34′	0,15	0,17
		0,310	
		jusqu'à ∞	0,18
	33°+41′	0,20	0,18
		0,447	
		jusqu'à ∞	0,20
	45°	0,25	0,19
		0,5	0,22
		0,830	
		jusqu'à ∞	0,24
	55°	0,25	0,19
		0,5	0,24
		1,0	0,27
		2,0	0,31
		3,177	
		jusqu'à ∞	0,34
60°	0	0	0,12
	26°+34′	0,15	0,14
		0,280	
		jusqu'à ∞	0,15
	33°+41′	0,20	0,15
		0,396	
		jusqu'à ∞	0,17
	45°	0,25	0,16
		0,687	0,19
		jusqu'à ∞	
	60°	0,25	0,16
		0,5	0,20
		1,0	0,24
		2,0	0,28
		3,0	0,30
		3.686	
		jusqu'à ∞	0,31

TABLEAU II.

Épaisseur a du mur en vue du glissement

$$\left(k=2,\ \frac{w}{w_1}=\frac{2}{3},\ \text{tang}\,\varphi_1=0{,}70\right).$$

φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$	φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$	φ	α	$\frac{h}{H}$	$\frac{a}{H}$
0	0	0	0,95	30°	20°	0,358	0,26	40°	40°	0,5	0,14
15°	0	0	0,39			jusqu'à ∞				1,0	0,22
	5°	0,083			26°+34′	0,25	0,23			1,972	
		jusqu'à ∞	0,46			0,5	0,32			jusqu'à ∞	0,39
	10°	0,1	0,47			0,653		45°	0	0	0,04
		0,2				jusqu'à ∞	0,37		26°+34′	0,2	0,05
		jusqu'à ∞	0,56		30°	0,25	0,23			0,384	
	15°	0,25	0,60			0,5	0,32			jusqu'à ∞	0,07
		0,561				1,0	0,51		33°+41′	0,25	0,06
		jusqu'à ∞	0,90			1,329				0,594	
20°	0	0	0,29			jusqu'à ∞	0,66			jusqu'à ∞	0,09
	5°	0,075		35°	0	0	0,10		45°	0,25	0,06
		jusqu'à ∞	0,33		36°+34′	0,25	0,16			0,5	0,08
	10°	0,1	0,35			0,514				1,0	0,13
		0,172				jusqu'à ∞	0,22			2,333	
		jusqu'à ∞	0,39		33°+41′	0,25	0,16			jusqu'à ∞	0,26
	20°	0,25	0,44			0,5	0,22	50°	0	0	0,02
		0,5	0,62			1,057			26°+34′	0,15	0,02
		0,795				jusqu'à ∞	0,35			0,343	
		jusqu'à ∞	0,85		35°	0,25	0,16			jusqu'à ∞	0,03
25°	0	0	0,21			0,50	0,22		33°+41′	0,25	0,03
	5°	0,069				1,0	0,34			0,508	
		jusqu'à ∞	0,24			1,639				jusqu'à ∞	0,04
	15°	0,1	0,25			jusqu'à ∞	0,53		45°	0,25	0,03
		0,264	0,33	40°	0	0	0,07			0,50	0,04
		jusqu'à ∞			26°+34′	0,20	0,09			1,073	0,06
	25°	0,25	0,32			0,438				jusqu'à ∞	
		0,50	0,48			jusqu'à ∞	0,13		50°	0,25	0,03
		1,063			33°+41′	0,25	0,10			0,5	0,04
		jusqu'à ∞	0,77			0,5	0,14			1,0	0,06
30°	0	0	0,15			0,729				2,0	0,10
	10°	0,139				jusqu'à ∞	0,18			2,731	
		jusqu'à ∞	0,19		40°	0,25	0,10			jusqu'à ∞	0,13
	20°	0,1	0,18								

§ 100. Exemples.

1er *Exemple*. Etant donné un massif de 6m de hauteur, avec talus à 1 1/2 de base pour 1 de hauteur, on veut le revêtir d'un mur de soutènement de 4m de haut : quelle épaisseur doit avoir ce mur,

sachant que le talus naturel des terres est 40° et en prenant le coefficient de stabilité $k = 2$?

On a ici
$$\varphi = 40°,$$
$$\alpha = 33° + 41',$$
$$h = 6^m - 4^m = 2^m,$$
$$H = 4^m;$$
d'où
$$\frac{h}{H} = 0,5.$$

Le tableau I donne pour le renversement :

$$a = 0,32.\,H = 0,32.4 = 1^m,28.$$

Le tableau II donne pour le glissement :

$$a = 0,14.\,H = 0,14.4 = 0^m,56.$$

On doit donc donner au mur une épaisseur de $1^m,28$.

2e *Exemple*. On veut revêtir le même massif sur toute sa hauteur.

$$\varphi = 40°,$$
$$\alpha = 0,$$
$$h = 0,$$
$$H = 6,$$
et
$$\frac{h}{H} = 0.$$

Le tableau I donne $a = 0,22 \times 6 = 1^m,32$. Le tableau II donne une valeur moindre.

Si l'on ne trouvait pas dans les tableaux ci-dessus les données mêmes du cas considéré, on prendrait les nombres les plus voisins; ou bien l'on ferait une interpolation fort simple.

Fig. 140.

3e *Exemple*. Soit *ef* (fig. 140) le flanc d'un côteau. Pour la construction d'une route on doit couper le côteau sur 10^m de largeur et le revêtir d'un mur de soutènement de 2^m, 50 de hauteur ; le talus naturel des terres est de 30°. Quelle doit être l'épaisseur du mur pour le coefficient de stabilité $k = 2$?

$$\varphi = 30^\circ,$$
$$\alpha = 14^\circ,$$
$$h = \infty,$$
$$H = 2^m,50,$$

et $$\frac{h}{H} = \infty.$$

La valeur $\alpha = 14^\circ$ n'est pas dans les tables, mais on y trouve $\alpha = 10^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$. A ces valeurs répondent les coefficients 0,33 et 0,40 (tableau I). La variation du coefficient est donc 0,07 pour une variation angulaire de 10° : soit, pour 4°, $\frac{4}{10}.0,07 = 0,028$. Le coefficient à adopter sera donc
$0,33 + 0,028 = 0,358$. D'où $a = 0,358 \times 2,5 = 0^m,895$. Le tableau II donnerait un nombre moindre.

4e *Exemple*. Quelle épaisseur doit-on donner à un mur de soutènement de 3^m de haut qui supporte un remblai de route de 4^m de haut avec talus à $1\frac{1}{2}$ de base pour 1 de hauteur, le talus naturel des terres étant de 42°, et le coefficient de stabilité $k = 2$ étant jugé suffisant ?

On a ici $$\varphi = 42^\circ,$$
$$\alpha = 33^\circ 41',$$
$$h = 1^m,$$
$$H = 3^m,$$

et $$\frac{h}{H} = 0,333.$$

Prenons $\varphi = 40^\circ$ comme valeur approchée par défaut, laquelle donnera ainsi un résultat plus grand pour a ; $\frac{h}{H} = 0,333$ tombe entre les valeurs tabulaires 0,25 et 0,5 qui répondent pour $\frac{a}{H}$ à 0,29 et 0,32. Il faut donc prendre 0,30. $a = 0,30 \times 3 = 0^m,90$.

Pour $\varphi = 45^\circ$ on aurait $a = 0,26 \times 3 = 0^m,78$. Pour $\varphi = 42^\circ$ on prendra la valeur d'interpolation $a = 0,78 + \frac{3}{5}.0,12 = 0^m,85$.

§ 101. Détermination de l'épaisseur a des murs à fruit extérieur.

$$\left(k = 2,\ \frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}\right).$$

Un mur dont le parement extérieur présente un fruit est plus stable à section égale qu'un mur à parements verticaux, au point de vue du renversement; ou, à stabilité égale, il exige un moindre cube de matériaux. Il est donc bon de donner un fruit aux murs.

Pour obtenir l'épaisseur moyenne d'un semblable mur, on calculera l'épaisseur au moyen du tableau I où le mur est supposé vertical, et l'on fera la réduction de la manière suivante.

Soit $\frac{1}{n}$ l'expression du fruit, c'est-à-dire le fruit répondant à 1^m de hauteur. On retranchera de la valeur trouvée pour a la quantité $0{,}36 \times \frac{1}{n} \times H$.

Ce changement du profil est sans influence sur les valeurs du tableau II relatif au glissement.

Exemple. Supposons que l'on donne au mur de soutènement considéré dans le 1er exemple ci-dessus un fruit de $\frac{1}{12}$. L'épaisseur moyenne devra être

$$a = \left(0{,}32 - 0{,}36 \times \frac{1}{12}\right)H = 0{,}29.H \doteq 1^m{,}16.$$

Ce qui correspond, le parement postérieur étant vertical, à une épaisseur en couronne de 0^m, 99, et au pied de 1^m, 33.

Un fruit ou une retraite sur le parement postérieur du mur n'exerce qu'une faible influence sur la stabilité, et l'on n'aura pas à en tenir compte [1].

[1] Cette observation ne s'applique pas aux murs de soutènement dont le profil postérieur est une série de redans. Ce profil a certainement une grande influence sur la stabilité par rapport au renversement. L'auteur ne parle pas de ce profil, mais rien n'est plus facile que d'adapter à ce cas la théorie faite pour les murs rectangulaires.

§ 102. Détermination de l'épaisseur a pour des valeurs quelconques de k et de $\frac{w}{w_1}$.

On a remarqué plus haut que l'on peut le plus souvent regarder le rapport des poids spécifiques de la terre et de la maçonnerie comme constant et égal à $\frac{2}{3}$. Il peut être utile néanmoins de déduire dans des cas particuliers ce nombre d'expériences spéciales.

Le coefficient de stabilité $k = 2$ assure une stabilité suffisante, comme l'apprennent les revêtements de Vauban, notamment lorsqu'il n'intervient pas de secousses sensibles. Mais dans les murs de soutènement élevés ou faiblement surchargés et servant au passage des chemins de fer, il est nécessaire de porter le coefficient de stabilité au moins à la valeur 3, à raison des ébranlements relativement intenses causés par le passage des trains.

Dans tous les cas on admet que l'exécution technique de la maçonnerie est sans défaut : ce qui est encore plus indispensable pour les murs de soutènement soumis à une forte pression et à de forts ébranlements, ou à l'influence de l'eau.

Représentons par d le rapport $\frac{w}{w_1}$ qu'on a préalablement déterminé, par k_1 le coefficient de stabilité jugé indispensable dans le cas considéré, enfin par b l'épaisseur du mur de soutènement résultant de ces données. On déduira comme il suit l'épaisseur b de l'épaisseur a calculée au moyen des tableaux ci-dessus, et répondant à $k = 2$, $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$. Pour l'équilibre de rotation on prendra

$$b = a\sqrt{\frac{5}{4}dk_1};$$

pour l'équilibre de glissement :

$$b = \frac{3}{4}adk_1.$$

Le tableau suivant renferme quelques résultats de ces deux formules :

DONNÉES.		ÉPAISSEUR b CORRESPONDANTE.	
k_1	d	Rotation.	Glissement.
2	$\frac{2}{3}$	1000.a	1000.a
2,5	$\frac{2}{3}$	1118.a	1250.a
3	$\frac{2}{3}$	1225.a	1500.a
2	$\frac{3}{4}$	1061.a	1125.a
2,5	$\frac{3}{4}$	1186.a	1406.a
3	$\frac{3}{4}$	1299.a	1688.a

Exemple. Soit un remblai de route de $14^m,50$ avec talus à 45°, à soutenir par un mur de soutènement de 12^m de hauteur dont le parement extérieur aura $\frac{1}{24}$ de fruit. Quelle épaisseur doit avoir ce mur pour résister avec sécurité au renversement et au glissement ? On a ici

$$\varphi = 57° \text{ (obtenu par expérience)},$$
$$\alpha = 45°,$$
$$h = 14^m,50 - 12^m = 2^m,50,$$
$$H = 12^m,$$

et

$$\frac{h}{H} = \frac{2,50}{12} = 0,21,$$
$$k_1 = 3 \text{ (coefficient jugé nécessaire)},$$
$$d = \frac{3}{4} \text{ (donné par l'expérience)}.$$

En laissant de côté ces valeurs de k_1 et de d et le fruit du parement, on peut chercher dans le tableau I la valeur de a qui est 0,18. H.

Le tableau II montre que dans ce cas il n'y a pas de glissement possible.

Le fruit modifie l'épaisseur en remplaçant $a = 0,18.$ H par $a = (0,18 - 0,015)$ H $= 0,165.$ H.

Le changement des données k et $\frac{w}{w_1}$ en k_1 et d donne
$b = 1,299 \times a = 1,299 \times 0,165.$ H $= 0,214.$ H $= 2^m,57.$

§ 103. Observations finales.

1re *Remarque*. Les règles que nous venons d'énoncer s'appliquent au cas où la surcharge recouvre complétement le couronnement du mur de soutènement. Ce cas, qui est le plus fréquent, est aussi le plus défavorable, et l'on devrait réduire l'épaisseur a si le couronnement du mur demeurait en partie libre. Mais dans l'application il peut arriver que sous l'action des pluies ou par toute autre cause la terre vienne recouvrir le couronnement contrairement aux dispositions projetées. En conséquence, quand on projettera un mur de

Fig. 141.

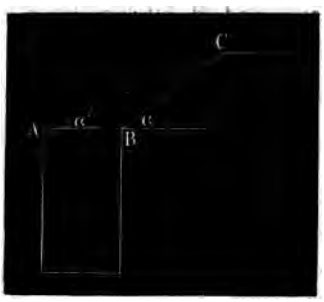


Fig. 142.

soutènement à couronnement découvert (fig. 141), on fera le calcul comme si le couronnement était recouvert et que le massif présentât le talus extérieur AC incliné suivant l'angle CAB $= \alpha'$.

2e *Remarque*. Pour des remblais hauts et étroits, revêtus de chaque côté de murs de soutènement, il peut arriver que l'espace compris entre les deux murs, et destiné à être rempli de terre, soit fort exigu. Il sera souvent plus avantageux dans ce cas de se dispenser de la construction de murs de soutènement proprement dits, en construisant à leur place deux ou plusieurs murs parallèles reliés par des murs de refend, formant des compartiments vides, qui seront couverts en voûtes (fig. 142).

3e *Remarque*. Il est à peine nécessaire d'observer que les murs en aile des ponts travaillent comme murs de soutènement, et doivent ainsi être calculés d'après les règles établies plus haut.

4e *Remarque*. Dans l'exécution des murs de soutènement et des remblais à soutenir, on doit toujours se proposer pour but d'augmenter la stabilité du mur contre le glissement et de diminuer la poussée des terres. Pour le premier point, on conseille d'araser les assises non horizontalement, mais avec une légère inclinaison vers l'intérieur; dans les murs à parement incliné il sera particulièrement facile de poser les assises normalement au parement (fig. 143).

Fig. 143.

Fig. 144

5e *Remarque*. Pour diminuer la poussée des terres, on recommande de remblayer derrière le mur par couches inclinées vers le mur et de pilonner chaque couche jusqu'à une certaine distance, mais non jusqu'au contact du mur. De la sorte le remblai comprimé aura un talus naturel plus incliné, sans que le pilonnage augmente la poussée sur le mur (fig. 144 et 145).

Fig. 145.

6e *Remarque*. Il sera utile enfin de ménager aux eaux un écoulement, de manière à tenir aussi sèches que possible les terres qui pressent le mur; on empêchera ainsi qu'un affaissement du remblai ne développe une poussée exagérée.

FIN.

TABLE DES MATIERES.

LIVRE I — PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

Pages.

§ 1. Exposition du principe 1
2. Démonstration du principe de la moindre résistance. 6
3. Construction du vrai système des résistances. 10
4. Observations sur la manière dont Moseley expose le principe. 12

APPLICATIONS DU PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

5. Equilibre d'une tige pesante appuyée contre une paroi verticale et une paroi horizontale. 13
6. Equilibre d'un coin entre deux plans inclinés. 16
7. Stabilité d'un vagon sur des rails. 18

LIVRE II. — THÉORIE DES VOÛTES.

CHAPITRE I. — Arcs a deux moitiés symétriques.

Section A. — *Equilibre de rotation sous des charges verticales symétriques.*

8. Généralités. 27
9. Courbe des pressions 30
10. Propriétés générales de la courbe des pressions. 32
11. Définition précise des éléments à déterminer pour obtenir la vraie courbe des pressions, ainsi que le minimum et le maximum de la poussée. 37
12. Caractères communs à la courbe des pressions répondant au minimum de la poussée et à celle qui répond au maximum. 39
13. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au minimum de la poussée. 41
14. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au maximum de la poussée. 45
15. Limites des courbes des pressions possibles. Limite de stabilité de la voûte. Cas où l'équilibre est impossible.. 47
16. Détermination, suivant la forme particulière de la voûte, de la vraie courbe des pressions, laquelle répond au minimum de la poussée. Procédé pour vérifier s'il y aura stabilité ou rupture. Joints de rupture. 48

TABLE DES MATIERES.

LIVRE I — PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

Pages.

§ 1. Exposition du principe 1
2. Démonstration du principe de la moindre résistance. 6
3. Construction du vrai système des résistances. 10
4. Observations sur la manière dont Moseley expose le principe. 12

APPLICATIONS DU PRINCIPE DE LA MOINDRE RÉSISTANCE.

5. Equilibre d'une tige pesante appuyée contre une paroi verticale et une paroi horizontale. 13
6. Equilibre d'un coin entre deux plans inclinés. 16
7. Stabilité d'un vagon sur des rails. 18

LIVRE II. — THÉORIE DES VOÛTES.

CHAPITRE I. — Arcs a deux moitiés symétriques.

Section A. — *Equilibre de rotation sous des charges verticales symétriques.*

8. Généralités. 27
9. Courbe des pressions 30
10. Propriétés générales de la courbe des pressions. 32
11. Définition précise des éléments à déterminer pour obtenir la vraie courbe des pressions, ainsi que le minimum et le maximum de la poussée. 37
12. Caractères communs à la courbe des pressions répondant au minimum de la poussée et à celle qui répond au maximum. 39
13. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au minimum de la poussée. 41
14. Caractère distinctif de la courbe des pressions qui répond au maximum de la poussée. 45
15. Limites des courbes des pressions possibles. Limite de stabilité de la voûte. Cas où l'équilibre est impossible.. 47
16. Détermination, suivant la forme particulière de la voûte, de la vraie courbe des pressions, laquelle répond au minimum de la poussée. Procédé pour vérifier s'il y aura stabilité ou rupture. Joints de rupture. 48

Pages.

§ 17. Cas particulier d'un arc supportant une surcharge exceptionnelle appliquée immédiatement sur le joint de culée 56
18. Influence de la compressibilité des voussoirs sur les courbes des pressions. . 59
19. Détermination de la courbe des pressions qui répond au maximum de la poussée. 61
20 Courbe des pressions dont la possibilité assurerait la stabilité de la voûte, quel que fût le degré de compressibilité des voussoirs. 64
21. Procédé pratique pour l'établissement d'une voûte stable. 66
22. Détermination de l'épaisseur des voûtes au point de vue de la résistance des matériaux. 70
Tableau des dimensions et des coefficients de pression et de stabilité de divers ponts connus 74
Table pour la détermination de l'épaisseur des voûtes. 75
23. Culées et tympans 79
24. Procédé pratique pour la construction de la courbe des pressions. 84
25. Premier exemple. Têtes du pont de Neuilly. 90
26. Deuxième exemple. Anse de panier du pont de Neuilly. 91
27. Troisième exemple. Le même arc du pont de Neuilly, chargé de poids isolés. 95
28. Quatrième exemple. Ogive. 95
29. Cinquième exemple. Plein cintre supportant une forte charge. 97
30. Sixième exemple. 99
31. Septième exemple. Plein cintre non chargé supérieurement. 100
32. Huitième exemple. Construction d'une voûte dont l'arc moyen soit une courbe des pressions possible. 101

SECTION B. — *Equilibre de rotation dans le cas de charges verticales et horizontales symétriques.*

33. Construction de la courbe des pressions répondant à des charges verticales et horizontales 104
34. Premier exemple. Le tunnel sous la Tamise. 105
35. Deuxième exemple. Plein cintre supportant un haut remblai de chemin de fer. 110
35 *a* Troisième exemple. Plein cintre sous un remblai en cours d'exécution. . . 112
36. Quatrième exemple. Construction d'un souterrain supportant un massif de terre et dont la courbe moyenne soit une courbe des pressions possible. . 115
36 *a*. Stabilité de la culée d'une voûte chargée verticalement et horizontalement. 117
36 *b*. Tunnel en terrain mouvant. 119

SECTION C. — *Equilibre de glissement.*

37. Conditions générales de l'équilibre de glissement. 122
38. Mode de rupture quand l'équilibre n'est pas assuré à la fois contre la rotation et contre le glissement. 124
39. Tracé des joints qui rend la tendance au glissement uniforme pour tous les joints ou qui l'annule. 126
40. Courbe enveloppe des pressions. 126
40 *a*. Stabilité des ponts existants au point de vue du glissement. 127

CHAPITRE II. — VOUTES A MOITIÉ DYSSYMÉTRIQUES OU A CHARGES DYSSYMÉTRIQUES.

SECTION A. — *Equilibre de rotation.*

Pages.
§ 41. Généralités pour le cas de charges verticales. 131
42. Les courbes des pressions et leurs propriétés générales. 132
43. Autres propriétés générales des courbes des pressions. 134
44. Condition commune aux courbes des pressions qui répondent à un minimum ou à un maximum de la poussée horizontale. 135
45. Premier cas, qui offre un caractère distinctif du minimum de la poussée horizontale. 137
46. Second cas, fournissant un second caractère pour le minimum et aussi un caractère pour le maximum de la poussée. 138
47. Instabilité des voûtes. 139
48. Joint où règne une pression horizontale. 140
49. Recherche de la vraie courbe des pressions. 142
50. Calcul des éléments nécessaires pour la construction d'une courbe des pressions. 143
51. Premier exemple. Plein-cintre avec charges dyssymétriques. 145
52. Deuxième exemple. Arc à forme dyssymétrique avec une charge supérieure fixe 149
53. Remarques sur les changements que la courbe des pressions éprouve quand on ajoute à la charge un poids isolé. 152
54. Equilibre de rotation pour des charges verticales et horizontales. 157
55. Exemple d'une voûte de pont du chemin de fer de Berg-et-Mark. 158

SECTION B. — *Equilibre de glissement.*

56. Vérification de la stabilité d'un arc par rapport au glissement. 163

SECTION C. — *Théorie des voûtes d'arête, des voûtes en arc de cloître, des coupoles et des cintres.*

57. Principes de la théorie des voûtes d'arête. 165
58. Principes de la théorie des arcs de cloître. 173
59. Principes de la théorie des coupoles 176
Premier exemple. Coupole ouverte par le haut et chargée de maçonnerie. 183
Second exemple. Coupole de Saint-Pierre de Rome. 186
59 *a*. Remarques sur la théorie des cintres. 192

CHAPITRE III. — CRITIQUE DES THÉORIES DES VOUTES LES PLUS CONNUES.

60. Théorie de Lahire 193
61. Théorie du coin d'Eytelwein, etc 194
62. Théorie de Coulomb. 196
63. Comparaison détaillée de la théorie de Coulomb avec la nouvelle. 199

Pages.

§ 64. Théories des voûtes fondées sur la considération d'une chaînette ou de courbes analogues. 201
65. Théories des voûtes fondées sur la considération des courbes des pressions. 208

CHAPITRE IV. — TABLES DES ÉPAISSEURS DES VOUTES ET DES CULÉES.

66. Explication des tables. 227
Table I. Voûtes en plein cintre. 231
Table II. Voûtes en arc de cercle surbaissé au quart. 249
Table III. Voûtes en arc de cercle surbaissé au sixième. 267

LIVRE III. — DES PRESSIONS DANS L'INTÉRIEUR D'UN MASSIF DE TERRE.

§ 67. Généralités. 285
68. Valeur de la poussée des terres d'après les considérations précédentes. . . 287
69 Cas particuliers. 293
70. Pression résultante sur une surface verticale de figure donnée. 294
70 *a*. Délimitation des cas auxquels s'appliquent les formules précédentes. . . 296
71. Prisme de terre de plus grande poussée. 277
72. Evaluation de la poussée contre une paroi qui n'est pas parfaitement lisse. . 299
73. Cas où α' est $> \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et $\varphi' > \varphi$. 305
74. Cas ou α' est $> \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et $\varphi' < \varphi$. 307
75. Résumé des résultats précédents. 308
76. Point d'application de la poussée des terres contre une surface de figure donnée. 309
77. Relation entre l'angle du frottement et le talus de roideur limite. 310
78. Point d'application de la poussée sur la base d'un massif à talus coulant. . . 314
79. Cas d'un massif à talus inégaux. 315

LIVRE IV. — THÉORIE DES MURS DE SOUTÈNEMENT.

80. Remarques générales. 319
81. Critique de la théorie de Poncelet et de Moseley. 320
82. Principe général pour l'établissement de nouvelles formules. 325
83. Formules pour la poussée des terres dans le premier cas. 327
84. Formules pour la poussée des terres dans le second cas. 330
85. Limites d'application de chacune des formules précédentes. 332
Tableau I. Quantités auxiliaires. 334
Tableau II. Quantités auxiliaires. 324
86. Hauteur du point d'application de la poussée P. 334

Pages.

§ 87. Formules pour assurer contre le renversement les murs de soutènement à parement extérieur vertical. 337
88. Détermination du coefficient n et du coefficient de stabilité k d'après Vauban. 359
89. Calcul des quantités auxiliaires qui entrent dans les formules générales. . . 341
Tableau III. Sinus, cosinus et tangentes de degré en degré. 342
Tableau IV. Quantités auxiliaires q, r, q' r'. 345
90. Calcul de l'épaisseur des murs pour des valeurs particulières des variables. 344
Tableau V. Epaisseur à donner au mur pour s'opposer au renversement. 345
91. Formules pour assurer les murs de soutènement contre le glissement. . . . 347
92. Calcul de l'épaisseur des murs pour des valeurs particulières des variables. 349
Tableau VI. Epaisseur à donner au mur pour s'opposer au glissement. 350
93. Comparaison des résultats des tableaux V et VI. 351
94. Formules pour garantir du renversement les murs de soutènement à parement extérieur incliné. 352
95. Formules pour garantir du glissement les murs de soutènement à parement extérieur incliné.. 355
96. Influence de l'inclinaison des plans d'assises sur la stabilité contre le glissement. 356

INSTRUCTION PRATIQUE POUR L'EXÉCUTION DES MURS DE SOUTÈNEMENT.

97. Définition des quantités dont dépend l'épaisseur d'un mur de soutènement. 358
98. Valeurs moyennes des quantités ci-dessus définies. 350
99. Détermination de l'épaisseur a des murs de soutènement à profil rectangulaire pour $\frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}$, tang $\varphi_1 = 0{,}70$ et $k = 2$ 359
Tableau I. Epaisseur en vue du renversement. 361
Tableau II. Epaisseur en vue du glissement. 362
100. Exemples. 362
101. Détermination de l'épaisseur a des murs à fruit extérieur $\left(k = 2, \frac{w}{w_1} = \frac{2}{3}\right)$. 365
102. Détermination de l'épaisseur a pour des valeurs quelconques de k et de $\frac{w}{w_1}$. 366
103. Observations finales. 368

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Typographie Hennuyer et fils, rue du Boulevard, 7.

TA 656 .S3314 1864 C.1
Traite de la stabilite des con
Stanford University Libraries
3 6105 030 428 424

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLEC
IN HOUSE USE ONL

STANFORD UNIVERSITY LIBRAI
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6